Devoir non surveillé 2

Thème : Nature de séries

à rendre le mardi 17 septembre

Exercice 1

1. Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n\ln^2(n)}$.
2. Déterminer la nature des séries numériques suivantes.
$$\sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+n-1} \qquad \sum \frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+3} \qquad \sum \frac{2-n^2}{n^3\ln^2(n)+1}.$$
3. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Exercice 2

1. Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ et de $\sum \frac{1}{n^2\ln^2(n)}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \ln(1+x)$.
3. En déduire la nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right)$.

Ce qui suit est facultatif

Problème 1 (Règle de Raabe-Duhamel)

Question préliminaire. Rappeler la règle de D'Alembert pour les séries numériques.
Dans ce problème, on s'intéresse à la nature de la série $\sum u_n$ dans le cas critique où $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Partie 1 : Un cas simple.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **strictement positifs**. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On considère la suite de terme général $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$.
2. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
3. Déterminer alors la nature de $\sum u_n$ en fonction de α.
4. Application : Dans cette question, on se donne deux réels a et b strictement positifs.
Déterminer la nature de $\sum u_n$ où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

Partie 2 : Règle de Raabe-Duhamel.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **strictement positifs**. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
On veut démontrer le résultat suivant.

- Si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
- Si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire !

1. Démontrer dans un premier temps, que si $\alpha < 0$ alors la série numérique $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
2. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.
   On se donne $\beta \in]1, \alpha[$ et on pose $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$.
   (a) Démontrer qu'il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait
   $$n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
   (b) Démontrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.
   (c) En déduire la nature de la série numérique $\sum u_n$.
3. On suppose dans cette question que $\alpha \in [0, 1[$. On se donne $\beta \in]\alpha, 1[$.
   En considérant encore $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$, déterminer la nature de la série numérique $\sum u_n$.
4. On montre ici que, dans le cas où $\alpha = 1$, toutes les situations sont possibles.
   (a) On pose $x_n = \dfrac{1}{n}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?
   Démontrer que l'on a : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (b) On pose $y_n = \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$. Quelle est la nature de $\sum y_n$?
   Démontrer que l'on a : $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Partie 3 : Applications.
Dans ce qui suit, on pourra utiliser les résultats démontrés précédemment.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $b_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \exp\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.
3. On se donne une fonction f strictement positive et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = f(1) f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdots f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (a) On suppose que $f(0) \neq 1$. Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.
   (b) On suppose que $f(0) = 1$ et on pose $\beta = f'(0)$. Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.