Devoir non surveillé 21 - Correction

Problème
E3A PSI 2012 maths 2

à partir d'une correction de A. Castella

Remarque : dans les premières questions, ce corrigé est un peu formels et les calculs ne sont pas sytématiquement détaillés. Néanmoins, ils sont toujours suggérés : il suffit de prendre un crayon et de suivre les consignes !
J'ai ajouté parfois quelques précisions en couleur.

Partie 1

Dans toute cette partie, on pose, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \mapsto e^{-ax}$ (notation introduite en **3.(a)** du sujet).

1. (a) Les solutions de l'équation homogène sont les Cf_a avec C constante réelle.
On pouvait ensuite faire varier la constante C, mais le plus facile ici est d'utiliser la réponse donnée, de poser $y_p(x) = -e^{ax} \displaystyle\int_1^x e^{-at} f(t)\, dt$ et de vérifier avec le théorème de l'analyse que y_p est une solution de (E_a^f).
Le théorème de structure permet de conclure.
Dans la solution ci-dessus, on reprend la démonstration de ce théorème et on refait le raisonnement par équivalences.
En multipliant (E_a^f) par f_a, et puisque $f_a' = -af_a$, on a :
$$z' - az = -f \iff f_a z' - af_a z = -f_a f \iff (f_a z)' = -f_a f$$
donc z est solution de (E_a^f) si et seulement si $f_a z$ est une primitive de $-f_a f$.
Or par le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction $H : x \mapsto -\displaystyle\int_1^x f_a f$ est une primitive de $-f_a f$ sur l'intervalle I, et les primitives de $-f_a f$ sur I sont égales entre elles à une constante près.
Donc z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $f_a z = H + K$, i.e. $z = (H + K)f_{-a}$, qui est le résultat voulu.

   (b) Si z_1 et z_2 sont deux solutions de (E_a^f), alors par **1.(a)**, il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que $z_1 = (H + K_1)f_{-a}$ et $z_2 = (H + K_2)f_{-a}$, donc tels que $z_1 - z_2 = (K_1 - K_2)f_{-a}$.
Si de plus z_1 et z_2 sont bornées sur I, alors $z_1 - z_2$ l'est aussi, or f_{-a} ne l'est pas (car on a $a > 0$, donc f_a tend vers $+\infty$ en $+\infty$), donc nécessairement $K_1 = K_2$, i.e. $z_1 = z_2$.
Ainsi $\boxed{\text{si } (E_a^f) \text{ admet une solution bornée sur } I\text{, alors celle-ci est unique.}}$

   (c) Par hypothèses sur f, la fonction $f_a f$ est continue sur I et dominée par f_a en $+\infty$. Or f_a est intégrable sur I car $a > 0$ (intégrales de référence), donc par comparaison, $f_a f$ l'est aussi.
Autrement dit, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$ converge absolument, donc elle converge.

   (d) • La fonction F est bien une solution de (E_a^f) sur I puisqu'elle est de la forme donnée en **1.(a)**, pour $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$ (par relation de Chasles), qui est bien une constante réelle par **1.(c)**.

- Soit M un majorant de $|f|$ sur I (M existe par hypothèse sur f). Alors par croissance de l'intégrale, $\forall\, x \in I,\ |F(x)| \leqslant e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant Me^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$. Or $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^{+\infty} = \frac{e^{-ax}}{a}$.
  Donc $\forall\, x \in I,\ |F(x)| \leqslant \dfrac{M}{a}$. Ainsi, la fonction F est bornée sur I.

On a montré que F est une solution bornée de (E_a^f) sur I, et par **1.(b)**, elle est unique.

2. (a) Par la formule de **1.(c)** ou de façon évidente au vu de l'équation (E_a^1), la solution bornée $U_a(1)$ de (E_a^1) est la fonction constante égale à $\dfrac{1}{a}$.

(b)
- Pour tout $f \in \mathcal{E}$, la fonction $U_a(f)$ est bornée et continue (même dérivable) sur I par construction (cf. **1.(a)** et **1.(d)**). Donc l'application U_a va de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
- L'application U_a est linéaire par linéarité de l'intégrale. En effet, pour tous $f, g \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\forall\, x \in I,\ U_a(\lambda f + g)(x) &= e^{ax}\int_x^{+\infty} f_a \times (\lambda f + g) \ = \ e^{ax}\int_x^{+\infty} (\lambda f_a f + f_a g) \\ &= \lambda e^{ax}(\int_x^{+\infty} f_a f + \int_x^{+\infty} f_a g) \ = \ \lambda U_a(f)(x) + U_a(g)(x),\end{aligned}$$

  donc $U_a(\lambda f + g) = \lambda U_a(f) + U_a(g)$.

On a montré que U_a est linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, i.e. que $\boxed{U_a \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$

(c) i. Si $U_a(f) = 0$, alors sa dérivée est nulle et en dérivant $U_a(f)$ on obtient facilement que $f = 0$. On pouvait aussi éviter le calcul en utilisant le fait que $U_a(f)$ est solution de (E_a^f) comme ci-dessous.
Soit $f \in \mathcal{E}$. Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$. Ainsi si $U_a(f) = 0$ (fonction nulle sur I), alors $U_a(f)' = 0$, et donc $f = 0$.
Cela montre que $\mathrm{Ker}(U_a) = \{0\}$, i.e. que $\boxed{U_a \text{ est injectif.}}$

ii. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, $U_a(f)$ est dérivable sur I puisque c'est une solution sur I de l'équation différentielle d'ordre un (E_a^f), et $U_a(f)' = aU_a(f) - f$ est continue comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont. Donc $U_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, i.e. $\boxed{U_a(f) \in \mathcal{E}_1.}$

iii. On vient de montrer que $\mathrm{Im}(U_a) \subset \mathcal{E}_1$. Ainsi, aucun élément de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1$ n'a d'antécédent par U_a. Comme l'ensemble $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1$ est non vide (il contient par exemple la fonction f définie par $f(x) = x$ sur $[1, 2]$ et $f(x) = 2$ sur $[2, +\infty[$, qui est continue et bornée sur I, mais pas dérivable en 2), cela montre que $\boxed{U_a \text{ n'est pas surjectif.}}$

(d) Il s'agit d'intégrales très classiques $\displaystyle\int e^{-at}\cos(\alpha t)dt$ et $\displaystyle\int e^{-at}\sin(\alpha t)dt$, à savoir calculer, soit en utilisant les complexes, soit par une double intégration par parties (à rédiger soigneusement en particulier quand l'intégrale est impropre)

- Pour montrer que $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U_1, il suffit, vu la linéarité de U_1, de montrer que $U_1(\sin)$ et $U_1(\cos)$ appartiennent à $\mathcal{F}$.
  <u>*Méthode 1.*</u> Avec la formule d'Euler $\cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}U_1(\cos)(x) + i\,U_1(\sin)(x) &= e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t + i\,e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}e^{it}\,\mathrm{d}t = e^x\int_x^{+\infty} e^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^x\left[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1}\right]_x^{+\infty} = e^x\frac{e^{(i-1)x}}{1-i} = \frac{e^{ix}}{1-i} = \frac{1}{2}e^{ix}(1+i) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{i}{2}(\cos(x) + \sin(x))\end{aligned}$$

On en déduit par unicité des écritures algébriques des nombres complexes que :

$$U_1(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin) \text{ et } U_1(\sin) = \frac{1}{2}(\cos + \sin).$$

D'où le résultat voulu.

<u>*Méthode 2.*</u> Par intégrations par parties dans lesquelles tous les termes convergent, on a pour $x \in I$:

* $U_1(\sin)(x) = e^x\Big(\big[-e^{-t}\sin(t)\big]_x^{+\infty} + \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \sin(x) + U_1(\cos)(x)$, et de même,
* $U_1(\cos)(x) = \cdots = \cos(x) - U_1(\sin)(x)$.

On en déduit encore que $2\,U_1(\sin) = \sin + \cos$ et $2\,U_1(\cos) = \cos - \sin$.

<u>*Conclusion.*</u> Ainsi $U_1(\cos)$ et $U_1(\sin)$ appartiennent à $\mathcal{F}$, et donc $\mathcal{F}$ est stable par U_1.

- La famille $(\sin, \cos)$ est évidemment libre (car les fonctions sin et cos ne sont pas proportionnelles) et génératrice de $\mathcal{F}$ (par définition de $\mathcal{F}$), donc la famille $(\sin, \cos)$ est une base de $\mathcal{F}$.
- Les calculs du premier point montrent que la matrice, dans la base $(\sin, \cos)$, de l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ induit par U_1, est la matrice :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$

Donc M est bien de la forme $\lambda\Omega$ où $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ et Ω est la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ dans le plan euclidien orienté usuel.

Remarques (problème d'énoncé).

— *En prenant la base* $(\cos, \sin)$*, on trouverait un angle de* $-\dfrac{\pi}{4}$.

— *Pire : en prenant une base plus exotique, comme* $(\sin, 2\cos)$*, ou* $(\sin, \sin + \cos)$*, la matrice* M *n'est pas de la forme* $\lambda\Omega$ *souhaitée ...*

3. (a) Pour tout $x \in I$, on a :

$$U_a(f_r)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+r)t}\,\mathrm{d}t = e^{ax}\left[\frac{e^{-(a+r)t}}{-(a+r)}\right]_x^{+\infty} = e^{ax}\frac{e^{-(a+r)x}}{a+r} = \frac{e^{-rx}}{a+r} = \frac{1}{a+r}f_r(x).$$

Donc $\boxed{U_a(f_r) = \dfrac{1}{a+r}f_r.}$

(b) Attention la notation $U_a^n(f_r)$ signifie qu'on applique n fois U_a à f_r (composée), ce n'est pas une puissance !

Tout $\lambda \in \left]0, \dfrac{1}{a}\right[$ est de la forme $\lambda = \dfrac{1}{a+r}$ pour $r = \dfrac{1}{\lambda} - a \geqslant 0$, et par **3.(a)**, on a alors $U_a(f_r) = \lambda f_r$. Comme $f_r \neq 0$, cela montre qu'un tel λ est valeur propre de U_a.

(c) Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_a^n(f_r) = \dfrac{1}{(a+r)^n}f_r$.

Or $\dfrac{1}{a+r} > 0$ et pour tout $x \in I$, $f_r(x) \neq 0$, on en déduit que :

- si $\dfrac{1}{a+r} < 1$, i.e. si $a+r > 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 (fonction nulle),
- si $a + r = 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à f_r, donc converge simplement vers f_r,
- si $\dfrac{1}{a+r} > 1$, i.e. si $a+r < 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

(d) Vu **3.(c)**, $\boxed{\text{la série } \sum U_a^n(f_r) \text{ converge simplement sur } I \text{ si et seulement si } \dfrac{1}{a+r} < 1, \text{ i.e. } a+r > 1.}$

Le cas échéant, on a alors $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{a+r})^n f_r = \frac{1}{1-\dfrac{1}{a+r}} f_r = \frac{a+r}{a+r-1} f_r.}$

4. Soit $x \in I$. On effectue le changement de variable affine (inutile de détailler le théorème dans ce cas) $u = t - x$:

$$U_a(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t = e^{ax} \int_0^{+\infty} e^{-a(x+u)} f(x+u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u)\,\mathrm{d}u.$$

C'est le résultat voulu (en remplaçant u par t).

5. (a) Montrons que la famille $\mathcal{B}_p = (g_0, \ldots, g_p)$ est libre. Si $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ est tel que $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k g_k = 0$ (fonction nulle sur I), alors pour tout $x \in I$, $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^k e^{-x} = 0$, et donc $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^k = 0$ puisque $e^{-x} \neq 0$.
Ainsi le polynôme $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k X^k$ admet une infinité de racines (car $I = [1, +\infty[$ est infini), donc c'est le polynôme nul, i.e. $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
Ainsi $\mathcal{B}_p$ est libre, et comme elle engendre $\mathcal{F}_p$ par définition, c'en est une base.

(b) Comme en **2.(d)**, pour montrer que $\mathcal{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, \ldots, g_p)$ est stable par U_a, il suffit, vu la linéarité de U_a, de montrer que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $U_a(g_k) \in \mathcal{F}_p$. Or pour tout $x \in I$, on a par la formule de **4** :

$$\begin{aligned} U_a(g_k)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} g_k(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-(x+t)} (x+t)^k\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i t^{k-i}\,\mathrm{d}t \quad \text{par la formule du binôme,} \\ &= \sum_{i=0}^{k} e^{-x} x^i \binom{k}{i} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^{k-i}\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Autrement dit, $U_a(g_k) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,k} g_i$ où $\lambda_{i,k} = \binom{k}{i} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^{k-i}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $U_a(g_k) \in \mathcal{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, \ldots, g_p)$, donc $\boxed{\mathcal{F}_p \text{ est stable par } U_a.}$

(c) Les calculs faits en **5.(b)** montrent que la matrice, dans la base $(g_0, \ldots, g_p)$, de l'endomorphisme de $\mathcal{F}_p$ induit par U_a, est triangulaire supérieure, et a pour coefficients diagonaux les

$$\lambda_{k,k} = \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+1},$$

pour $k \in [\![0, p]\!]$. Son déterminant, qui est le déterminant demandé, est donc $\prod_{k=0}^{p} \lambda_{k,k} = \frac{1}{(a+1)^{p+1}}$.

6. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, on a $|f| \in \mathcal{E}$, de sorte que $U_a(f)$ et $U_a(|f|)$ sont bien définis. Et par croissance de l'intégrale, on a alors, pour tout $x \in I$, $|U_a(f)(x)| = |e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)|\,\mathrm{d}t = U_a(|f|)(x)$.

Donc $\boxed{|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|).}$

7. Si f est positive, alors de façon évidente au vu des formules définissant $U_a(f)$ en **1.(d)** ou en **4**, on a par positivité de l'intégrale, $\forall\, x \in I$, $U_a(f)(x) \geqslant 0$. Donc si f est positive, il en est de même pour $U_a(f)$.

8. On suppose f décroissante.
   - Alors pour tous $x \in I$ et $t \geqslant 0$, on a $f(x+t) \leqslant f(x)$, donc $e^{-at}f(x+t) \leqslant e^{-at}f(x)$, et donc par croissance de l'intégrale avec la formule vue en **4**, $U_a(f)(x) \leqslant f(x)\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{a}$.
     Puisque $a > 0$, on a donc $\forall\, x \in I$, $aU_a(f)(x) \leqslant f(x)$, i.e. $aU_a(f) \leqslant f$.
   - Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$. Ainsi $U_a(f)' = aU_a(f) - f \leqslant 0$ par le point précédent, donc :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est décroissante alors } U_a(f) \text{ est décroissante.}}$$

9. (a) L'hypothèse $f \in \mathcal{H}$ implique $f' \in \mathcal{E}$, de sorte que $U_a(f')$ est bien défini.
   Alors par intégration par parties dans laquelle tous les termes convergent, on a pour $x \in I$:

$$U_a(f')(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = e^{ax}\big[e^{-at}f(t)\big]_x^{+\infty} + ae^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x) + aU_a(f)(x).$$

   Ainsi $\boxed{U_a(f') - aU_a(f) + f = 0.}$

   (b) Comme $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), on a aussi $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$, et donc vu **9.(a)** :

$$U_a(f)' = U_a(f').$$

   Autrement dit, $\forall\, f \in \mathcal{H}$, $D \circ U_a(f) = U_a \circ D(f)$, i.e. $\boxed{U_a \text{ et } D \text{ commutent dans } \mathcal{H}.}$

10. On va montrer par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : \forall\, f \in \mathcal{E},\, \forall\, x \in I,\, U_a^{n+1}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   - La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie par définition de U_a (cf. **1.(d)**).
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Fixons $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$. En appliquant $\mathcal{P}_n$ à la fonction $U_a(f)$, on a :

$$U_a^{n+2}(f)(x) = U_a^{n+1}(U_a^n(f))(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}U_a(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

     Or la fonction $g : t \mapsto e^{-at}U_a(f)(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et admet pour dérivée $g' : t \mapsto -e^{-at}f(t)$ puisque $U_a(f)$ est solution de (E_a^f) (cf. calculs faits en **1.(a)**).
     Une intégration par parties donne alors, sous réserve de convergence de l'un des deux termes de droite :

$$\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}U_a(f)(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}U_a(f)(t)\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

     Or le terme entre crochets converge vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées (car $U_a(f)$ est bornée), et vaut 0 en 0. On en déduit que la dernière intégrale converge, et on a alors, en multipliant par e^{ax} :

$$U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t$$

     qui est le formule voulue au rant $n+1$. On a montré que si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   - On conclut par principe de récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. que :

$$\boxed{\forall\, f \in \mathcal{E},\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, U_a^{n+1}(f) : x \mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

11. (a) La série exponentielle $\sum \dfrac{(t-x)^n}{n!}$ converge et a pour somme e^{t-x}, donc la série proposée converge et a pour somme : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) = e^{t-x} e^{-at} f(t) = e^{-x} e^{(1-a)t} f(t).}$

(b) Soit $x \in I$. Il s'agit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} U_a^{n+1}(f)(x)$ converge et de calculer sa somme $S(x)$.

Vu **10**, il s'agit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et de calculer sa somme $e^{-ax} S(x)$.

On va pour cela utiliser le théorème d'intégration terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)$ est continue (par morceaux) sur $[x, +\infty[$.
- Par **11.(a)**, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[x, +\infty[$, et sa somme $F : t \mapsto e^{-x} e^{(1-a)t} f(t)$ est continue (par morceaux) sur $[x, +\infty[$.
- Soit M un majorant de $|f|$ sur I. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [x, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{M}{n!} t^n e^{-at}$, et la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-at}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, puisque dominée en $+\infty$ par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ par croissances comparées.
  Donc f_n est intégrable sur $[x, +\infty[$, et $\displaystyle\int_x^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{n!} \int_x^{+\infty} t^n e^{-at}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-at}\,\mathrm{d}t$.
  Or avec l'indication et en posant $u = at$,
  $$\int_0^{+\infty} t^n e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^n} \int_0^{+\infty} (at)^n e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$
  On a donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{a^{n+1}}$. Or la série géométrique $\sum \dfrac{1}{a^{n+1}}$ converge puisque $a > 1$, donc par comparaison, la série de terme général $\displaystyle\int_x^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Le théorème de d'intégration terme à terme s'applique donc et montre que la fonction F est intégrable sur $[x, +\infty[$, que la série $\displaystyle\sum \int_x^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_x^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = e^{-x} \int_x^{+\infty} e^{(1-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En multipliant par $e^a x$, on conclut que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} U_a^{n+1}(f)(x)$ converge et a pour somme :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_a^{n+1}(f)(x) = e^{(a-1)x} \int_x^{+\infty} e^{(1-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) La formule obtenue ci-dessus montre que $\boxed{S = U_b(f) \text{ pour } b = a - 1 > 0.}$

Remarque. On peut illustrer ce résultat avec l'exemple traité en **3.4**. En effet pour $f = f_r$ et $a + r > 1$, on a montré que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{a+r}{a+r-1} f_r$, donc $\displaystyle S = \sum_{n=1}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{a+r}{a+r-1} f_r - f_r = \frac{1}{a+r-1} f_r = U_{a-1}(f_r)$ vu **3.(a)**.

Partie 2

1. Il est clair que si f_1, f_2 et $h \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ sont telles que $f_1 = \underset{+\infty}{o}(f_2)$ et h ne s'annulant pas, alors $hf_1 = \underset{+\infty}{o}(hf_2)$.

   Ainsi si $f = \underset{+\infty}{o}(g)$, alors $f_a f = \underset{+\infty}{o}(f_a g)$ et donc par l'encadré, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to +\infty}{o}\Big(\int_x^{+\infty} e^{-at} g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$.

   En multipliant cette relation par e^{ax}, on obtient $\boxed{U_a(f)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(U_a(g)(x)).}$

2. On rappelle que $f_1 \underset{+\infty}{\sim} f_2 \iff f_1 - f_2 = \underset{+\infty}{o}(f_2)$.

   Ainsi si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $f - g = \underset{+\infty}{o}(g)$, donc par **1**, $U_a(f-g) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$.

   Or par linéarité de U_a (cf. **Partie 1**, **2.(b)**), on a $U_a(f-g) = U_a(f) - U_a(g)$, donc $U_a(f) - U_a(g) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$, ce qui signifie $\boxed{U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g).}$

3. - Cas d'une limite nulle.
     Si $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, i.e. si $f = \underset{+\infty}{o}(1)$, alors par **1**, $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(1))$.

     Or les calculs faits en **Partie 1**, **2.(a)** ou **3.(a)**, donnent $U_a(1) = \dfrac{1}{a}$, donc $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(\dfrac{1}{a})$, i.e. $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = 0$.
   - Cas d'une limite non nulle.
     Si $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors en appliquant le point précédent à $f - \ell$, ou la question **2** à l'équivalent $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$, on obtient en profitant de la linéarité de U_a, $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \dfrac{\ell}{a}$.

   On a montre dans tous les cas que si f converge en $+\infty$, alors $U_a(f)$ aussi, avec $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \dfrac{1}{a} \lim\limits_{+\infty} f$.

4. (a) Soit $\omega > 0$. Les fonctions h_ω et $h'_\omega = -\omega h_{\omega+1}$ appartiennent à $\mathcal{E}$, donc par intégration par parties dans laquelle tous les termes convergent (la limite en $+\infty$ du terme entre crochets est nulle par croissances comparées), on a pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} H_\omega(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} h_\omega(t)\,\mathrm{d}t \\ &= e^{ax} \left[\frac{e^{-at}}{-a} h_\omega(t)\right]_x^{+\infty} - \frac{\omega}{a} e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} h_{\omega+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a} h_\omega(x) - \frac{\omega}{a} H_{\omega+1}(x) \end{aligned}$$

   qui est l'égalité voulue.

   (b) On a manifestement $h_{\omega+1} = \underset{+\infty}{o}(h_\omega)$, donc par **1**, $H_{\omega+1} = \underset{+\infty}{o}(H_\omega)$.

   L'égalité de **4.(a)** donne donc $\dfrac{1}{a} h_\omega = H_\omega + \underset{+\infty}{o}(H_\omega)$, i.e. $\dfrac{1}{a} h_\omega \underset{+\infty}{\sim} H_\omega$, qui est l'équivalent demandé.

5. (a) Soit $x \in I$. Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) + \int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Or pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $e^{-at} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-at)^k}{k!}$, donc $\dfrac{e^{-at}-1}{t} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}$.

   Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g_k : t \mapsto \dfrac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}$.

   On a manifestement $\|g_k\|_{\infty,[1,x]} = \dfrac{a^k x^{k-1}}{k!}$, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} g_k$ converge normalement sur $[1, x]$.

On peut donc intervertir somme et intégrale sur le segment $[1,x]$:

$$\int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_1^x \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{k\cdot k!}(x^k-1).$$

On a donc bien $\boxed{\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{k\cdot k!}(x^k-1).}$

(b) Immédiat vu **5.(a)** puisque $H_1(x) = e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = e^{ax}\Big(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t\Big)$ par relation de Chasles.

Partie 3

1. Par **Partie 1**, **3.(a)**, $U_a(f_r) = \dfrac{1}{a+r} f_r$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $r>0$ (intégrale de référence).

2. Par **Partie 2**, **4.(b)**, on a $H_\omega \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a} h_\omega$, donc les deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (car les fonctions en jeu sont continues et positives sur $I=[x,+\infty[$).
   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \omega>1$ (intégrale de Riemann), donc :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \omega > 1.}$$

3. (a) Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$, i.e. avec les notations de cette question, $F' - aF + f = 0$. En intégrant cette relation entre 1 et $x\in I$, on obtient, puisque $\Phi' = F$:

$$F(x) - F(1) - a\Phi(x) + \varphi(x) = 0, \text{ i.e. } \Phi'(x) - F(1) - a\Phi(x) + \varphi(x) = 0.$$

   (b) La fonction φ est une primitive de f sur I, donc elle y est continue (même de classe $\mathcal{C}^1$). Et puisque f est positive, on a pour tout $x\in I$, $0 \leqslant \varphi(x) = \displaystyle\int_1^x f \leqslant \int_1^{+\infty} f$, donc φ est bornée sur I. Ainsi, $\varphi\in\mathcal{E}$.

   (c) Par **3.(a)**, on a $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\big(F(x)+\varphi(x)-F(1)\big)$.
   Or $F = U_a(f)$ est bornée par construction, et φ est bornée par **3.(b)**, donc Φ l'est.
   Par ailleurs comme f est positive, $F = U_a(f)$ l'est aussi par **Partie 1**, **7**, donc Φ est croissante.
   Le théorème de la limite monotone implique alors que $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t$ converge quand $x\to+\infty$, ce qui est la définition de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$.

4. On suppose f intégrable, donc la question **3** s'applique à $|f|$ et montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(|f|)$ converge.
   Or par **Partie 1**, **6**, on a $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$, donc par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |U_a(f)|$ converge, autrement dit $U_a(f)$ est intégrale sur I.