# Devoir non surveillé 21

**à rendre le vendredi 21 mars**

## Problème

Dans tout le problème, $I$ est l'intervalle $[1;+\infty[$.
On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $I$ à valeurs réelles, et $\mathscr{E}_1 = \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions de classe $C^1$ sur $I$ à valeurs réelles.
Lorsque $V$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$, on rappelle que $V^0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ et que si $n$ est un entier naturel non nul, $V^n = \underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{n}$.
Soit $a$ un **réel strictement positif**.
Pour tout $f$ de $\mathscr{E}$, on considère l'équation différentielle sur $I$ :

$$y' - ay + f = 0 \qquad (E_a^f)$$

et on note $\mathscr{S}_a^f$ l'ensemble de ses solutions sur $I$.

### Partie 1

1. Étude de l'équation $(E_a^f)$.

   (a) Soient $f \in \mathscr{E}$ et $z \in \mathscr{E}_1$.
   Montrer que $z$ est solution de $(E_a^f)$ si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

   $$\forall\, x \in I, \quad z(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

   (b) Prouver que s'il existe une solution de $(E_a^f)$ qui soit bornée sur $I$, alors celle-ci est unique.

   (c) Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   (d) Montrer que la fonction $F : x \in I \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique solution de $(E_a^f)$ bornée sur $I$.

   On définit ainsi une application $U_a$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à toute fonction $f$ de $\mathscr{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.

2. Étude de quelques propriétés de $U_a$.

   (a) Expliciter $U_a(f)$ lorsque $f$ est la fonction constante égale à 1.

   (b) Vérifier que $U_a$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

   (c) i. L'endomorphisme $U_a$ est-il injectif ?

   ii. Montrer que pour tout $f$ élément de $\mathscr{E}$, $U_a(f) \in \mathscr{E}_1$.

   iii. L'endomorphisme $U_a$ est-il surjectif ?

   (d) **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que** $a = 1$.
   Montrer que le sous-espace de $\mathscr{E}$ : $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par $U_1$. En donner une base $\mathscr{B}$.
   Écrire la matrice $M$ de la restriction de $U_1$ à $\mathscr{F}$ dans cette base.
   Prouver que $M = l\Omega$ où $l$ est un réel positif et $\Omega$ une matrice de rotation dont on déterminera l'angle.

3. **On revient au cas général**.

   (a) Pour $r \in [0;+\infty[$, on note $f_r$ la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $x \mapsto e^{-rx}$.
   Déterminer $U_a(f_r)$.

   (b) Soit $l \in \left]0;\dfrac{1}{a}\right]$. Le réel $l$ est-il valeur propre de l'endomorphisme $U_a$ ?

   (c) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ sur $I$.

   (d) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)$ sur $I$ et déterminer sa somme lorsqu'elle converge.

4. Prouver que l'on a, pour tout élément $f$ de $\mathscr{E}$ :
$$\forall\, x \in I, \quad U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

5. Pour tout entier naturel $k$, on note $g_k$ la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $g_k(x) = e^{-x}x^k$ et on note $G_k = U_a(g_k)$.
Pour tout entier naturel $p$, on note $\mathscr{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0,\ldots,g_p)$.

   (a) Donner une base $\mathscr{B}_p$ de $\mathscr{F}_p$.

   (b) Vérifier que $\mathscr{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ stable par $U_a$.

   (c) Calculer le déterminant de la restriction de $U_a$ à $\mathscr{F}_p$.

6. Prouver que l'on a : $\forall\, f \in \mathscr{E}$, $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

7. Soit $f$ dans $\mathscr{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$ ?

8. Soit $f$ dans $\mathscr{E}$ décroissante. Prouver que $aU_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

9. On note :

   (a) $\mathscr{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ de classe $C^1$ sur $I$ et tels que $f'$ est bornée sur $I$.

   (b) $D$ l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{H}$.

   Soit $f \in \mathscr{H}$.

   (a) Montrer que l'on a : $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$.

   (b) En déduire que $U_a$ et $D$ commutent dans $\mathscr{H}$.

10. Soit $f \in \mathscr{E}$.

    Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_a^{n+1}(f)$ est la fonction $x \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$.

    On pourra procéder par intégration par parties.

11. Soit $f \in \mathscr{E}$. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que** $a > 1$.

    (a) Soient $x \in I$ et $t$ un réel supérieur ou égal à $x$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\right)$.

    (b) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} U_a(f)$ est simplement convergente sur $I$. On notera $S$ sa somme.

    On pourra utiliser sans démonstration : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u = n!$

    (c) Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $S = U_b(f)$.

---

**Ce qui suit est facultatif**

---

**Problème (suite)**

## Partie 2

**On admettra le théorème suivant :**

Soient $u, v \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ telles que $v$ est à valeurs positives et $\displaystyle\int_1^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors :

$$u = \underset{+\infty}{o}(v) \quad \Longrightarrow \quad \int_x^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

1. Soient $f$ et $g$ dans $\mathscr{E}$ avec $g$ à valeurs positives et $f = \underset{+\infty}{o}(g)$. Montrer que $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$.
2. Soient $f$ et $g$ dans $\mathscr{E}$, $g$ à valeurs positives telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Montrer que $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$.
3. Soit $f \in \mathscr{E}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $U_a(f)$ admet aussi une limite finie en $+\infty$. On pourra commencer par étudier le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
4. Pour tout réel strictement positif $\omega$, on note pour toute la suite du problème, $h_\omega$ la fonction de $\mathscr{E}$ qui à $t \in I$ associe $\dfrac{1}{t^\omega}$ et $H_\omega = U_a(h_\omega)$.
   (a) Montrer que l'on a pour tout $x \in I$ : $H_\omega(x) = \dfrac{h_\omega(x)}{a} - \dfrac{\omega}{a} H_{\omega+1}(x)$.
   (b) En déduire que : $H_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{h_\omega(x)}{a}$.
5. (a) Montrer que pour tout $x \in I$ : $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k\cdot k!}(x^k - 1)$.
   (b) En déduire que l'on a : $\displaystyle H_1(x) = e^{ax}\left(-\ln x - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{a^k}{k\cdot k!}(x^k-1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$.

## Partie 3

On reprend les fonctions $f_r$ définies à la question **3.1** de la partie **1** avec maintenant $\underline{r > 0}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Pour les fonctions $h_\omega$ définies à la question **4** de la partie **2**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
3. Soit $f \in \mathscr{E}$, à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   On note $\varphi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $F = U_a(f)$ et $\Phi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Vérifier que l'on a pour tout $x \in I$ : $\Phi'(x) - a\Phi(x) + \varphi(x) - F(1) = 0$.
   (b) Prouver que $\varphi \in \mathscr{E}$.
   (c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
4. Soit $f \in \mathscr{E}$ intégrable sur $I$. Montrer que $U_a(f)$ est aussi intégrable sur $I$.