Devoir non surveillé 20 - Correction

Problème 1

Extrait de CCP PSI 2008

Une correction de C. Baillaud

Partie I

I.1 On vérifie facilement que les colonnes de T sont **unitaires** et deux à deux orthogonales donc
$\boxed{T \text{ est une matrice orthogonale.}}$

I.2

I.2.1 On calcule les vecteurs $t(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_3 - e_4)$ (Cf la première colonne de T) et $t(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 + e_3 + e_4)$. On remarque que

$$t(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - \sqrt{2}\varepsilon_1) \in F_1 \qquad \text{et} \qquad t(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 + \sqrt{2}\varepsilon_1) \in F_1$$

et donc
Par linéarité de t, l'image de tout vecteur de F_1 est encore dans F_1 donc :
$\boxed{F_1 \text{ est stable par } t.}$
Par ailleurs (e_1, ε_1) est libre (deux vecteurs « visiblement » non proportionnels), c'est donc une base de F_1. On en déduit que
$\boxed{\dim(F_1) = 2.}$

I.2.2 La matrice T est orthogonale et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, donc t est un automorphisme orthogonal. De plus, F_1 est stable par t donc, d'après le cours, son orthogonal est aussi stable par t.
Finalement $\boxed{F_2 = F_1^\perp \text{ est \textbf{stable} par } t.}$
On calcule par ailleurs
$(e_2|e_1) = (e_2|\varepsilon_1) = 0$, donc $e_2 \in F_1^\perp = F_2$.
$(\varepsilon_2|e_1) = (\varepsilon_2|\varepsilon_1) = 0$ donc $\varepsilon_2 \in F_2$.
La famille (e_2, ε_2) est libre (deux vecteurs visiblement non proportionnels).
Comme $\dim F_2 = 2$ on en déduit que c'est une **base** de F_2.
La famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2)$ est donc une base de E.

I.3

I.3.1 Les vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux.
Donc $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E.
Or t est un automorphisme orthogonal. Donc $\boxed{\text{la matrice } T' \text{ est orthogonale.}}$
On connaît déjà $t(e_1)$ et $t(\varepsilon_1)$. de plus

$$t(e_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + e_3 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + \sqrt{2}\varepsilon_2)$$

et

$$t(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_2 + e_3 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_2 + \sqrt{2}\varepsilon_2)$$

ce qui permet de remplir (par colonnes) la matrice : $\boxed{T' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}}$

I.3.2 $\theta = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{2}{3}}$ donne $\sin(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
De plus $\theta \in [\,-\pi/2, \pi/2\,]$ donc $\cos\theta \geqslant 0$ et $\cos^2\theta = \frac{1}{3}$. Donc $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il vient $\quad T' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Pour $i = 1$ ou 2 notons $b_i = (e_i, \varepsilon_i)$ (qui est une base de F_i) et t_i l'endomorphisme de F_i induit par t sur F_i (ce sont des sous-espaces stables par t !).
On a

$$A_1 = \text{Mat}_{b_1}(t_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

et on reconnaît que t_1 est la rotation d'angle $-\theta$ dans le plan orienté F_1.
De même

$$A_2 = \text{Mat}_{b_2}(t_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et on reconnaît que t_2 est la rotation d'angle θ dans le plan orienté F_2.

I.3.3 Avec les mêmes notations la matrice de t^k dans $\mathcal{B}'$ est (par blocs)

$$T'^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}.$$

Or on a sans calculs A_1^k (matrice de la rotation d'angle $-k\theta$) et aussi A_2^k (matrice de la rotation d'angle $k\theta$). Ce qui donne

$$\boxed{T'^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ 0 & 0 & \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}}.$$

I.4 $\zeta_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\omega} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega}\right)^k$.

➢ Si $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega} = 1$ donc $\zeta_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. Dans ce cas la suite $(\zeta_n(\omega))$ n'est pas bornée.

➢ Si $\omega \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors $\zeta_n(\omega) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\omega}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega}}$ donc

$$|\zeta_n(\omega)| = \frac{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\omega}|}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega}|} \leqslant \frac{|1| + |\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\omega}|}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega}|} = \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega}|} \text{ majorant indépendant de } n.$$

Dans ce cas la suite $(\zeta_n(\omega))$ est bornée.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (\zeta_n(\omega)) \text{ est bornée si et seulement si } \omega \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.}$

I.5

I.5.1 Le sous-espace F_1 est stable par t, donc par tous les t^k ($k \in [\![0, n-1]\!]$), donc par T_n.

I.5.2.1 On continue avec les notations de **I.3.2**.

Notons $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ la matrice du vecteur y dans la base b_1. Alors $t^k(y)$ a pour matrice de coordonnées dans b_1 : $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = (A_1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Par conséquent

$$\boxed{V_k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}}$$

Le vecteur $T_n(y) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k(y)$ a pour matrice-colonne dans la base b_1 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_k \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_k = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\theta) \\ -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\theta) & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\zeta_n(\theta)) & \mathrm{Im}(\zeta_n(\theta)) \\ -\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta)) & \mathrm{Re}(\zeta_n(\theta)) \end{pmatrix}}$$

I.5.2.2 Comme la suite $\left(\zeta_n(\theta)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (car $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$), il en est de même pour les suites $(\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta)_{n \in \mathbb{N}^*}$, donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} T_n(y) = 0}$$

I.5.3 Soit $x \in E$. Écrivons $x = y + z$ avec $y \in F_1$ et $z \in F_2$.

On a comme ci-dessus $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(z) = 0$. De plus $T_n(x) = T_n(y) + T_n(z)$. On en déduit

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = 0}$$

Partie II

II.1

II.1.1 Soit $x \in \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $y \in \mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$. Alors $\ell(x) = x$ et il existe $\alpha \in E$ tel que $y = (\ell - \mathrm{Id}_E)(\alpha)$. alors

$$(x|y) = (x|\ell(\alpha) - \alpha) = (x|\ell(\alpha)) - (x|\alpha) = (\ell(x)|\ell(\alpha)) - (x|\alpha) = 0$$

puisque $\ell \in \mathrm{O}(E)$.

On a donc montré que $\boxed{\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E) \text{ sont orthogonaux.}}$

Il en résulte que leur somme est directe : $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$.

De plus cette somme a pour dimension $\dim \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{rg}\,(\ell - \mathrm{Id}_E) = \dim E$ (théorème du rang). Donc cette somme est égale à E.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \text{ et } \mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E.}$$

Soit $x \in E$. D'après le résultat précédent il existe $y \in \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in E$ tels que $x = y + \ell(z) - z$.

II.1.2 On a $\ell(y) = y$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \ell^k(y) = y$. Donc

$$\ell^k(x) = y + \ell^k\Big(\ell(z) - z\Big) = y + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z).$$

On a donc

$$L_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(y + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z)\Big) = y + \frac{1}{n}\Big(\ell^n(z) - \ell^0(z)\Big)$$

(par télescopage) et enfin

$$\boxed{L_n(x) = y + \frac{1}{n}\Big(\ell^n(z) - z\Big)}$$

II.1.3 On a donc $\|L_n(x) - y\| = \left\|\frac{1}{n}\Big(\ell^n(z) - z\Big)\right\| \leqslant \frac{1}{n}\Big(\|\ell^n(z)\| + \|z\|\Big)$ par l'inégalité triangulaire.
Comme ℓ conserve la norme, $\|\ell^n(z)\| = \|z\|$, on trouve

$$0 \leqslant \|L_n(x) - y\| \leqslant \frac{1}{n}2\|z\|.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|L_n(x) - y\| = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n(x) = y}$

II.2

II.2.1 Soit $x \in \operatorname{Ker}(\ell - \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(\ell - \operatorname{Id}_E)$ et soit $y \in E$ tel que $x = \ell(y) - y$.
Alors

$$\forall k \in [\![\, 0,\, n-1 \,]\!], \quad \ell^k(x) = \ell^{k+1}(y) - \ell^k(y)$$

ce qui donne en sommant :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\ell^{k+1}(y) - \ell^k(y)\Big) = \ell^n(y) - \ell^0(y) = \ell^n(y) - y$$

(par télescopage).
Or on sait aussi que $x \in \operatorname{Ker}(\ell - \operatorname{Id}_E)$ donc $\ell(x) = x$, et donc $\forall k \in [\![\, 0,\, n-1 \,]\!], \quad \ell^k(x) = x$.
L'égalité précédente devient

$$\sum_{k=0}^{n-1} x = \ell^n(y) - y$$

ce qui donne

$$\boxed{\ell^n(y) = nx + y}$$

On a donc $\|nx\| = \|\ell^n(y) - y\| \leqslant \|\ell^n(y)\| + \|y\|$. Or $\|\ell^n(y)\| \leqslant \|y\|$ car $\ell \in B(E)$. En divisant par $n > 0$ on trouve donc

$$0 \leqslant \|x\| \leqslant \frac{2}{n}\|y\|$$

donc le théorème de l'encadrement nécessite que $\|x\| = 0$ ce qui donne $x = 0_E$.
On vient donc de prouver que $\operatorname{Ker}(\ell - \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(\ell - \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}$. Le **théorème du rang** appliqué à $\ell - \operatorname{Id}_E$ donne comme précédemment que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\ell - \operatorname{Id}_E) \text{ et } \operatorname{Im}(\ell - \operatorname{Id}_E) \text{ sont supplémentaires dans } E}$$

II.2.2 On a donc, comme au **II.1** (à développer) :

$$\boxed{L_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y}$$

Exercice 1

1. La matrice M est symétrique réelle donc par le théorème spectral ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux et elle est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = P^T AP$ soit diagonale.

2. On remarque que $M - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ est de rang $1 < 3$ donc $\frac{1}{2}$ est valeur propre de M. Et comme M est diagonalisable :

$$m_{1/2}(M) = \dim(E_{1/2}(M)) = 3 - \mathrm{rg}\left(M - \frac{1}{2}I_3\right) = 3 - 1 = 2.$$

On remarque aussi que $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc 1 est aussi valeur propre de M. Comme la somme des multiplicités de valeurs propres est égale à 3, $m_1(M) = 1$ et M ne possède pas d'autre valeur propre.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \text{ avec } m_{1/2}(M) = 2 \text{ et } m_1(M) = 1.}$$

On aurait aussi pu calculer le polynôme caractéristique.

3. On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(M)$ et $E_1(M)$ est de dimension 1 donc $E_1(M) = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

On pose $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (bon de $E_1(M)$).

De plus, on sait que les sous-espaces propres de M sont orthogonaux, donc $E_{1/2}(M) = E_1(M)^\perp : x+y+z = 0$.

On choisit $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = X_1 \wedge X_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, par construction, (X_2, X_3) est une bon de $E_{1/2}(M)$ et (X_1, X_2, X_3) est une bon de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ par construction.

Les formules de changement de base donnent : $\boxed{P^{-1}MP = P^T MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = D.}$

4. **Méthode 1 :** On a tout d'abord $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longmapsto PMP^T$ est linéaire et comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie, elle est continue. En particulier, elle est continue en Δ. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = \Delta$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(D^n) = \varphi(\Delta).$$

Or $\varphi(D^n) = PD^nP^T = A^n$ et $\varphi(\Delta) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L.}$

Méthode 2 : M est digonalisable et $\mathrm{Sp}(M) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ donc le polynôme suivant est annulateur de M.

$$P_0(X) = (X-1)(X-1/2).$$

On écrit la division euclidienne de X^n par P_0. Il existe un unique polynôme Q_n, et deux uniques réels a_n et b_n tels que :

$$X^n = Q_n(X)P_0(X) + a_nX + b_n.$$

En évaluant en $X = 1$ et $X = 1/2$, on trouve que a_n et b_n sont solutions d'un système, et après calculs que $a_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ et $b_n = \frac{1}{2^{n-1}} - 1$.

On a donc $M^n = Q_n(M)\underbrace{P_0(M)}_{=0} + a_nM + b_nI_3 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)M + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)I_3$.

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 2M - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = L.}$

5. On a de manière immédiate, $L^2 = L$, donc L est la matrice d'un projecteur.

   Le calcul donne rapidement $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\mathrm{Ker}(L) : x + y + z = 0$.

   Donc $\mathrm{Ker}(L) = (\mathrm{Im}(L))^{\perp}$.
   Puisque la base canonique est orthonormée, l'endomorphisme u défini par sa matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = L$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

6. (a) Le calcul donne rapidement : $X^TDX = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$.

   (b) On choisit la norme $\|\ \|_1$ sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Si $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in A$ alors $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \leq 1$.

   Ainsi, $x^2 \leq 1 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} \leq 1$ donc $|x| \leq 1$.
   De même, $y^2 \leq 2 - 2x^2 - z^2$ donc $|y| \leq \sqrt{2}$, et aussi $|z| \leq \sqrt{2}$.

   Finalement, pour tout $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in A$, on a $\|X|_1 = |x| + |y| + |z| \leq 1 + 2\sqrt{2}$ donc :

   $$\boxed{A \text{ est une partie bornée de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

   (c) L'application $f : X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longmapsto x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \in \mathbb{R}$ est continue (polynomiale en les coordonnées x, y, z), l'ensemble $]-\infty, 1]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ donc

   $$\boxed{A = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) \leq 1\} = f^{-1}(]-\infty, 1]) \text{ est une partie fermée de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

   On aurait aussi pu prendre une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers Z, et montrer que $Z \in A$ (caractérisation séquentielle).

Exercice 2

Oral Mines-Ponts PSI 2021

1. Par linéarité à gauhe du produit scalaire, on obtient facilement que $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Soient $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\langle u(x), y\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, y \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \langle e_k, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle \langle e_k, x\rangle = \langle x, u(y)\rangle\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$

2. Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$ alors $u(x) = 0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$ et donc pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\langle x, e_k\rangle = 0$. Ainsi, x est orthogonal à tous les éléments de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ donc $x \in E^{\perp} = \{0\}$, ainsi $x = 0$ et donc :

$$\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } u.}$$

   Soit λ une valeur propre de u. Alors il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\langle u(x), x\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, x \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 \geq 0 \\ \langle u(x), x\rangle &= \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2\end{aligned}$$

   Et comme $x \neq 0$, $\|x\|^2 > 0$ et donc :

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2}{\|x\|^2} \geq 0.$$

   Et finalement $\boxed{\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*.}$

3. u est un endomorphisme symétrique donc il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de E formée de vecteurs propres de u :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \exists \lambda_i > 0, \qquad u(e'_i) = \lambda_i e'_i.$$

   Soit v l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad v(e'_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e'_i$$

   On a donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $v^2(e'_i) = \dfrac{1}{\lambda_i} e'_i = u^{-1}('_i)$. Et par linéairité : $\forall x \in E,\ v^2(x) = u^{-1}(x)$.

   C'est bien un automorphisme (l'image d'une base est une base), symétrique (sa matrice dans une bon est diagonale donc symétrique) et $v^2 = u^{-1}$.

   Il n'y a pas unicité : si v est solution, $-v$ aussi et $v \neq -v$ car v est non nul.

4. Avec les notations précédentes, on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Puisque $\mathcal{B}'$ est une bon, et par définition de u :

$$P = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1' \rangle & \cdots & \langle e_n, e_1' \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_1, e_n' \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n' \rangle \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle e_1', e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n', e_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_1', e_n \rangle & \cdots & \langle e_n', e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{P^T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u).}$

On note $(X_1, \ldots, X_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Ainsi, $X_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e_i)$ et donc $X_i' = PX_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(e_i)$.
On note M' et N' les matrices de u et v dans la base $\mathcal{B}'$. Puisque $v^2 = u^{-1}$, on :
Alors $M' = (N'^2)^{-1}$ (commute avec N'), et par les formules de changement de bases :

$$M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u) = P\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u) = P\ P^T.$$

Et aussi $N'X_i' = N'PX_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v(e_i))$.
Puisque $\mathcal{B}'$ est une bon, on a :

$$\langle v(e_i), v(e_j) \rangle = \ (N'PX_i)^T.(N'PX_j) = X_i^T P^T (N')^T N'PX_j.$$

Or v est un endomorphisme symétrique et $\mathcal{B}'$ est une bon, donc $(N')^T = N'$.

$$\langle v(e_i), v(e_j) \rangle = X_i^T P^T N'^2 PX_j = X_i^T P^T (M')^{-1} PX_j = X_i^T P^T (P\ P^T)^{-1} PX_j = X_i^T X_j = \delta_{i,j}.$$

Et donc $\boxed{(v(e_1), \ldots, v(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E.}$