Devoir non surveillé 20 NC

à ne pas rendre...

Problème

Notations

Étant donné un espace vectoriel E, on note Id_E l'endomorphisme identité de E.
On note $\mathrm{Im}\ell$ l'image d'un endomorphisme ℓ de E et $\mathrm{Ker}\ell$ son noyau.
Pour $k \in \mathbb{N}$ on note ℓ^k l'endomorphisme de E défini par $\ell^0 = \mathrm{Id}_E$ si $k = 0$ et par $\ell^k = \ell \circ \ell^{k-1}$ sinon.
Étant donné une base $\mathcal{B}$ de E on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell)$ la matrice de l'endomorphisme ℓ dans la base $\mathcal{B}$.
On désigne par $\mathrm{Vect}(u, v)$ (respectivement par $\mathrm{Vect}(u, F)$) le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u et v (respectivement engendré par le vecteur u et les vecteurs de F).
Lorsque E sera un espace vectoriel normé on notera $\|u\|$ la norme d'un vecteur u.
Lorsque E sera un espace euclidien on notera $(u|v)$ le produit scalaire des vecteurs u et v ; on note $\mathrm{O}(E)$ le groupe orthogonal de E (c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E), $F^\perp$ désigne l'orthogonal du sous-espace vectoriel F.

Partie I

Dans cette partie E est un espace euclidien de dimension 4, rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Soit t l'endomorphisme de E défini par sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

I.1 Montrer que T est une matrice orthogonale.

I.2 On considère les deux vecteurs suivants de E : $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4)$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$.

I.2.1 On note $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \varepsilon_1)$. Déterminer les vecteurs $t(e_1)$ et $t(\varepsilon_1)$.
En déduire que F_1 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2, stable par t.

I.2.2 Soit $F_2 = F_1^\perp$ l'orthogonal du sous-espace F_1. Montrer que F_2 est stable par t.
Montrer que (e_2, ε_2) est une base de F_2.

La famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2)$ est donc une base de E.

I.3 On note $T' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(t)$.

I.3.1 Justifier que la matrice T' est orthogonale. Expliciter T'.

I.3.2 Soit $\theta = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. Exprimer la matrice T' en fonction de θ.
On oriente le plan F_1 par la base (e_1, ε_1) (respectivement on oriente le plan F_2 par la base (e_2, ε_2)).
Préciser la nature géométrique de l'endomorphisme de F_1 (respectivement de F_2) induit par t.

I.3.3 Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer en fonction de θ et k la matrice de t^k relativement à la base $\mathcal{B}'$.

I.4 Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\omega}$.

Expliciter $\zeta_n(\omega)$ selon les valeurs de ω.

En déduire les réels ω pour lesquels la suite complexe $\Big(\zeta_n(\omega)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

I.5 Pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $T_n(x) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k(x)$.

I.5.1 Justifier que le sous-espace F_1 est stable par T_n.

I.5.2 Soit $y = \alpha e_1 + \beta \varepsilon_1 \in F_1$.

On note $t^k(y) = \gamma_k e_1 + \delta_k \varepsilon_1, \quad T_n(y) = \lambda_n e_1 + \mu_n \varepsilon_1$.

I.5.2.1 Déterminer la matrice $V_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = V_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

En déduire la matrice $U_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \lambda_n \\ \mu_n \end{pmatrix} = U_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On exprimera V_k en fonction de θ et k, et U_n en fonction de θ et n.

I.5.2.2 Montrer que la suite $\Big(T_n(y)\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

I.5.3 Soit $x \in E$. En écrivant $x = y + z$ avec $y \in F_1$ et $z \in F_2$, montrer que la suite $\big(T_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Partie II

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel. Étant donné un endomorphisme ℓ de E, pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $L_n(x) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x)$.

II.1 Dans cette partie **II.1** on suppose que E est un espace euclidien et que $\ell \in \mathrm{O}(E)$.

II.1.1 Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux.

En déduire qu'ils sont supplémentaires dans E.

Soit $x \in E$. D'après le résultat précédent il existe $y \in \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in E$ tels que $x = y + \ell(z) - z$.

II.1.2 Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer $\ell^k(x)$ en fonction de y, z et k. En déduire l'expression de $L_n(x)$ en fonction de y, z et n.

II.1.3 Montrer que la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite que l'on déterminera lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite de la partie **II**, étant donné un espace vectoriel normé E on notera $B(E)$ l'ensemble des endomorphismes h de E qui vérifient, pour tout x de E : $\|h(x)\| \leqslant \|x\|$.

II.2 Dans cette partie **II.2** on suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Soit $\ell \in B(E)$. Pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$ on reprend la notation $L_n(x)$ définie au début de la partie **II**.

II.2.1 On suppose que x appartient à l'intersection $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$. Soit y dans E tel que $x = \ell(y) - y$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ exprimer $\ell^n(y)$ en fonction de x, y et n.

En déduire que $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

II.2.2 Soit $x \in E$. Montrer que la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Exercice 1

On note E l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et orienté par sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$.

1. Que peut-on dire de M en vertu du théorème spectral ?
2. Déterminer les valeurs propres de M et leurs multiplicités respectives.
3. Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^T M P = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, où α et β sont des réels distincts à préciser.
4. Démontrer que la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
5. On note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} M^n$ et u l'endomorphisme défini par sa matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = L$.
   Montrer que u est projecteur orthogonal de E et préciser sur quel sous-espace vectoriel.
6. On note $A = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ X^T D X \leq 1\}$.
   (a) Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer $X^T D X$ en fonction de x, y, z.
   (b) Démontrer que A est une partie bornée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (c) Démontrer que A est une partie fermée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 ($\star$)

Soient E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et :

$$u : x \in E \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Vérifier que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire qu'il existe un automorphisme symétrique v de E tel que $u^{-1} = v^2$. Est-il unique ?
4. Soit v un automorphisme symétrique v de E tel que $u^{-1} = v^2$. Montrer que $(v(e_1), \ldots, v(e_n))$ est une base orthonormée de E.