Devoir non surveillé 1 - Correction

Thème : suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Remarques générales

• La rédaction par récurrence est loin d'être acquise pour plusieurs étudiants. Il leur faut absolument retravailler cette notion.

• Pour plus de la moitié de la classe, $\cos(a) = \cos(b)$ si et seulement si $a \equiv b[2\pi]$... Les autres utilisent la fonction Arccos dont ils ne connaissent visiblement pas la définition...

• Certaines questions très similaires à des exemples ou exercices du cours ont été très mal rédigées, notamment par quelques 5/2. Cette façon de travailler est assez stérile... Je pense à l'hypothèse de continuité dans le théorème du point fixe ou encore à l'utilisation précise de l'inégalité des accroissements finis. Je rappelle aussi que l'énoncé suivant n'est pas au programme (répété plusieurs fois en classe) et que vous devez le redémontrer.

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
> Si f est **croissante**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone**. Plus précisément, on a :
> - si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
> - si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

• Toujours trop de $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ inappropriés, de confusions entre f et $f(x)$ ou entre u_n et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut faire un effort sur ce point.

• Pensez à utiliser les questions précédentes quand c'est possible et à le mentionner.

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

   Elle est définie et continue sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, +\infty[$. En tant que composition d'applications croissantes, elle est croissante $[0, +\infty[$.

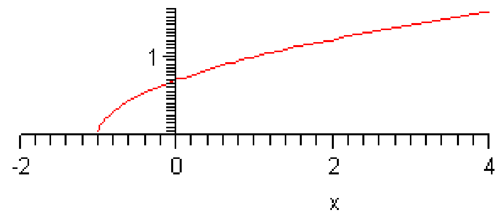
   - Comportement en -1 :

   $$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \quad = \quad \frac{\sqrt{\dfrac{1+x}{2}} - 0}{x+1} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2(x+1)}} \underset{x\to -1}{\longrightarrow} +\infty.$$

     Donc f n'est pas dérivable en 0 et son graphe y admet une demi-tangente verticale.
   - Comportement en $+\infty$: on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc le graphe de f admet une branche parabolique de direction $(0x)$.
   - Tableau des variations :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Graphe de f :



L'étude aussi précise n'était pas exigée puisqu'on pouvait déduire ce graphe de celui de la fonction racine. On indiquera néanmoins la demi-tangante verticale au point 'abscisse $x = -1$.

2. **Attention !** Seuls 2 étudiants sur 37 ont répondu correctment à cette question.
Certains ont écrit des équivalences fausses, d'autres ont écrit une suites d'égalités sans aucun raisonnement... Je propose 3 rédactions possible.

Rédaction 1 : par équivalence. Soit $x \in [-1, +\infty[$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\iff \quad \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \quad \iff \quad \frac{1+x}{2} = x^2 \ \text{ et } \ x \geq 0 \\ &\iff \quad 2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) = 0 \text{ et } \ x \geq 0 \\ &\iff \quad \left(x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\right) \ \text{ et } \ x \geq 0 \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède un unique point fixe, c'est } \alpha = 1.}$

Rédaction 2 : par implications. Soit $x \in [-1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\iff \quad \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1+x}{2} = x^2 \\ &\Longrightarrow \quad 2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \left(x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On vérifie que 1 est un point fixe de f et que $-1/2$ ne l'est pas.
Finalement, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède un unique point fixe, c'est } \alpha = 1.}$

Rédaction 3 : par équivalence avec une précaution. On remarque d'abord que si x est un point fixe de f alors $x = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \geq 0$.

Soit alors $\boxed{x \in [0,+\infty[}$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\iff \quad \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \quad \iff \quad \frac{1+x}{2} = x^2 \ \text{ et } \ x \geq 0 \\ &\iff \quad 2x^2 - x - 1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1) = 0 \text{ et } \ x \geq 0 \\ &\iff \quad \left(x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\right) \ \text{ et } \ x \geq 0 \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède un unique point fixe, c'est } \alpha = 1.}$

3. Soit $u_0 \in [-1,1]$.
   (a) $u_0 \in [-1,1]$ et l'intervalle $[-1,1]$ est stable par f donc les termes suivants de la suite sont bien définis.
   (b) Soit $x \in [0,1]$. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} f(x) - x \quad &= \quad \sqrt{\frac{1+x}{2}} - x \quad = \quad \frac{\frac{1+x}{2} - x^2}{\sqrt{\frac{1+x}{2}} + x} \\ &= \quad -\frac{(x-1)(x+1/2)}{\sqrt{\frac{1+x}{2}} + x} \ \geq \ 0 \text{ si } x \in [0,1] \end{aligned}$$

On sait que $u_1 \in f([-1,1]) \subset [0,1]$ et comme $[0,1]$ est stable par f, on a $\forall n \geq 1, \ u_n \in [0,1]$.
Si $x = u_n \in [0,1]$, la minoration précédente donne $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$.
Si $u_n \in [-1,0[$ (ce qui ne peut arriver qu'en $n = 0$), on a $u_0 < 0 \leq u_1$.

Finalement, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 1) donc elle converge. Notons ℓ sa limite. On a $\ell \in [0,1]$ et donc f est continue en ℓ. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $f(\ell) = \ell$ et donc $\ell = \alpha = 1$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\theta_n = \text{Arccos}(u_n)$.
   (a) D'une part, on a $\dfrac{u_n+1}{2} = u_{n+1}^2$ et $\theta_n = \text{Arccos}(u_n)$ donc

$$u_n = \cos(\theta_n) = 2u_{n+1}^2 - 1.$$

D'autre part, $\cos(2\theta_{n+1}) = 2\cos(\theta_{n+1}) - 1 = 2u_{n+1}^2 - 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \cos(\theta_n) = \cos(2\theta_{n+1}).}$$

On a enfin, $u_n \in [0,1]$ donc $\theta_n = \text{Arccos}(u_n) \in [0,\pi/2]$. Ainsi, θ_n et $2\theta_{n+1}$ sont deux angles de $[0,\pi]$ qui ont même cosinus. Ils sont donc égaux.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \theta_n = 2\theta_{n+1}.}$$

On reconnaît une suite géométrique et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \theta_0.}$

(b) On a donc $u_n = \cos(\theta_n) = \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \theta_0\right)$.

Or, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc on obtient

$$u_n = \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \theta_0\right) = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \theta_0\right]^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right).$$

On a bien $\boxed{u_n = 1 - \frac{\theta_0^2}{2.4^n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{4^n}\right).}$ Et donc $\alpha = \frac{\theta_0^2}{2}$.

Exercice 2

CCINP PSI 2024 (extrait)

Une correction d'I. Bigeard et E. Auclair

1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = \exp(-a) > 0$ et $f(1) = \exp(0) = 1$. On en déduit que :
$$\forall t \in]0,1[,\ f(t) \in]f(0), f(1)[\subset]0,1[\,.$$
Autrement dit, l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.

   On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition
$$(\mathcal{H}_n) :\ (z_n \in]0,1[\quad \text{et} \quad z_{n+1} - z_n \text{ est du même signe que } z_2 - z_1)\,.$$
   (a) Initialisation : Par hypothèse, $z_1 \in]0,1[$, donc $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.
   (b) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie.
   Alors $z_n \in]0,1[$ donc par stabilité de $]0,1[$ par f, $z_{n+1} = f(z_n) \in]0,1[$.
   De plus, par croissance de f, $z_{n+2} - z_{n+1} = f(z_{n+1}) - f(z_n)$ a même signe que $z_{n+1} - z_n$, donc $z_{n+2} - z_{n+1}$ a même signe que $z_2 - z_1$. Finalement, $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vérifiée.
   (c) Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \in]0,1[\quad \text{et } z_{n+1} - z_n \text{ est du même signe que } z_2 - z_1.}$
2. La suite (z_n) est une suite réelle monotone et bornée.
Donc, par le théorème de la limite monotone, (z_n) converge. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} z_n$.
Par ce qui précède,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < z_n < 1$$
donc, par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. De plus, par définition de (z_n),
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n)\,.$$
Alors, par passage à la limite et par continuité de f, on obtient :
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = f(\ell)\,.$$
Finalement, $\boxed{\text{la suite } (z_n) \text{ converge, et sa limite } \ell \in [0,1] \text{ est un point fixe de } f.}$
3. Soit $x \in]0,1]$. Alors, par croissance de exp,
$$\boxed{0 \leqslant \psi(x) \iff a(x-1) \leqslant \ln(x) \iff \exp(a(x-1)) \leqslant \exp(\ln(x) \iff f(x) \leqslant x.}$$

De même, par bijectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\psi(x) = 0 \iff a(x-1) = \ln(x) \iff \exp(a(x-1)) = \exp(\ln(x) \iff f(x) = x.}$$

4. La fonction ψ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1[\,,\ \psi'(x) = \frac{1}{x} - a > 1 - a \geqslant 0$.

   On en déduit que ψ est strictement croissante sur $]0,1]$ et $\boxed{\forall x \in]0,1]\,,\ \psi(x) \leqslant \psi(1) = 0.}$

   De plus, comme ψ est strictement croissante sur $]0,1]$, $\boxed{\psi \text{ ne s'annule qu'en } 1.}$

   Alors, par la question **Q3**, $\forall x \in]0,1]\,,\ f(x) = x \iff \psi(x) = 0 \iff x = 1\,.$

   Autrement dit, 1 est l'unique point fixe de f dans $]0,1]$, et donc dans $[0,1]$ car $f(0) \neq 0$.

   Alors, par la question **Q2.**, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = 1.}$

5. Sachant que $a > 1$, les variations de ψ sont données par :

x	0		$1/a$		1
$\psi'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\psi(1/a)$	$\searrow$	0

   Alors $\psi(1/a) > 0$ et $\lim_{x\to 0} \psi(x) < 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0,1/a[$ tel que $\psi(\alpha) = 0$. La stricte croissance de ψ sur $]0,1/a[$ assure l'unicité de α.
   Finalement, $\boxed{\text{il existe } \alpha \in]0,1] \text{ tel que } \forall x \in]0,1],\ \psi(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \alpha.}$

   La question **Q3.** entraîne alors que

$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ f(x) = x \iff \psi(x) = 0 \iff x = \alpha \text{ ou } x = 1.}$$

   1er cas : $z_1 \in]0,\alpha]$. Par croissance de f,

$$\forall x \in]0,\alpha],\ f(x) \leqslant f(\alpha) = \alpha.$$

   On en déduit que $]0,\alpha]$ est stable par f et $\forall n \geqslant 1,\ z_n \leqslant \alpha$.
   Par passage à la limite, on en déduit que $\ell \leqslant \alpha$. Or α est l'unique point fixe de f sur $[0,\alpha]$.
   Donc, par la question **Q2**, $\lim_{n\to+\infty} z_n = \alpha$.

   2ème cas : $z_1 \in]\alpha,1[$. De même, par stricte croissance de f, $\forall x \in]\alpha,1[\,,\ f(x) > f(\alpha) = \alpha$.
   Donc $]\alpha,1[$ est stable par f et $\forall n \geqslant 1,\ \alpha < z_n < 1$.
   De plus $\psi \geqslant 0$ sur $]\alpha,1]$ donc, par la question **Q2**, $\forall x \in]\alpha,1],\ f(x) \leqslant x$.
   Cela entraîne que la suite (z_n) est décroissante, donc $\ell \leqslant z_1 < 1$ et, comme précédemment, $\ell = \alpha$.

   Finalement, dans les deux cas, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \alpha.}$

Exercice 3

1. La fonction f est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}.$$

Ainsi, f est (strictement) décroissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, -1]$ et (strictement) croissante sur $[-1, +\infty[$. Le tableau de variation s'obtient facilement. On n'oubliera pas d'y préciser :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \ \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \ \text{ et } \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Et aussi : $f(-1) = 1/e$ (minimum sur $[-2, +\infty[$), $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = e/3 < 1$.

2. Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$f(x) = x \iff e^x = x(x+2) \iff e^x - x^2 - 2x = 0.$$

On pose $g(x) = e^x - x^2 - 2x$.
On a $g'(x) = e^x - 2x - 2$ et $g''(x) = e^x - 2$. Sur $[0,1]$, la fonction g'' s'annule unquement en $\ln(2)$, un tableau de variation rapide donne g' négative sur $[0,1]$ et donc g est strictement décroissante. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur son image qui contient 0 car : $g(0) = e - 2 > 0$ et $g(1) = e - 3 < 0$.
Ainsi, il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = 0$, ou encore tel que $f(x) = x$.

3. La fonction f' est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1], \ f''(x) = e^x \left(\frac{x+1}{(x+2)^2} - \frac{(x+2)^2 - 2(x+1)(x+2)}{(x+2)^4} \right) = e^x \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+2)^3} \geq 0.$$

Ainsi f' est croissante sur $[0,1]$ et donc $\boxed{\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq f'(x) \leq f'(1) = e.\frac{2}{9} \leq \frac{2}{3}.}$

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$.
Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq \frac{2}{3}|b - a|.$$

On peut choisir $a = L \in [0,1]$. On voudrait choisir $b = u_n$. Montrons que $u_n \in [0,1]$.
La fonction f est croissante sur $[0,1]$ donc $f\Big([0,1]\Big) = [f(0), f(1)] = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{e}{3}\right] \subset [0,1]$.
Puisque $u_0 \in [0,1]$, par une récurrence simple, on montrerait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
Et finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la majoration suivante.

$$|f(u_n) - L| = |u_{n+1} - L| \leq \frac{2}{3}|u_n - L|.$$

5. Par une récurrence simple : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - L| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |u_0 - L| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Et par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = L.}$

6. On cherche un rang à partir duquel on a $|u_n - L| < 10^{-5}$.
Par la question précédente, il suffit d'avoir $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 10^{-5}$, c'est-à-dire $n > \dfrac{5\ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)} \approx 28,4$.

$$\boxed{\text{À partir de } n = 29,\ u_n \text{ est une approximation de } L \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}$$

Exercice 4

Centrale PSI 2015 Maths 1 (extrait)

1. (a) f' étant positive, f croît sur $[0,1]$. Montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

- Initialisation : c'est vrai au rang 0 car $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) \in [0,1]$.
- Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang n. On a alors $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et par croissance de f sur $[0,1]$, on a aussi $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ et donc

$$u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n) \geq 0$$

En outre, comme $[0,1]$ est stable par f, $u_n, u_{n+1} \in [0,1]$ entraîne $u_{n+1} = f(u_n), u_{n+2} = f(u_{n+1}) \in [0,1]$. On a ainsi prouvé le résultat au rang $n+1$.

On a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle reste dans $[0,1]$. Par théorème de limite monotone, la suite converge et de plus (passage à la limite dans une inégalité large)

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \in [0,1]$$

Autre rédaction possible (limite hors-programme) : l'intervalle $[0,1]$ est stable par f et $u_0 = 0 \in [0,1]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = [0,1]$.
De plus, $f' \geq 0$ donc f est croissante, ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Puisque $u_1 \in [0,1]$ et $u_0 = 0$, on a $u_1 \geq u_0$ et donc la suite est croissante.

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée donc elle converge.}}$$

(b) On pose $\mathcal{A} = \{x \in [0,1],\ f(x) = x\}$.
$\mathcal{A}$ est minoré (par 0) et il contient 1 donc il est non vide. Par conséquent, il possède une borne inférieure

$$x_f = \inf\{x \in [0,1],\ f(x) = x\}.$$

Montrons que μ est un minimum, c'est-à-dire que $x_f \in \mathcal{A}$, ou encore que $f(x_f) = x_f$.

Par caractérisation de borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers x_f (et x_f est un minorant de $\mathcal{A}$, mais on ne s'en sert pas ici). On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a_n) = a_n \qquad \text{car } a_n \in \mathcal{A}.$$

Or f est continue en x_f donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_f)$. En passant à la limite dans l'égalité précédente, on trouve $f(x_f) = x_f$. Et puisque $x_f \in [0,1]$, on a bien $x_f \in \mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Il y a donc bien une plus petite solution à l'équation } f(x) = x.}$$

(c) Comme f croît sur $[0,1]$ et qu'elle est continue, on a $f([0,x_f]) = [f(0), f(x_f)] = [0,x_f]$. $u_0 \in [0,x_f]$ et $[0,x_f]$ est stable par f, donc (récurrence simple)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,x_f]$$

Par passage à la limite, $\ell \in [0,x_f]$ et f étant continue sur $[0,1]$, un passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne de plus $f(\ell) = \ell$. Enfin, par minimalité, x_f est le seul point fixe de f dans $[0,x_f]$. On a donc

$$\boxed{x_f = \ell.}$$

2. **Méthode 1 : en raisonnant par l'absurde.**
Supposons que $x_f = 1$. Par définition de borne inférieure, on a pour tout $x \in [0,1[$, $x \notin A$ et donc $f(x) \neq x$. On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. Elle vérifie donc $g(1) = 0$ et pour tout $x \in]0,1]$, $g(x) \neq 0$.
Comme g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g ne change pas de signe : elle est soit strictment positive, soit strictement négative sur $[0,1[$.
Or, par hypothèse, $g(0) = f(0) \in [0,1]$, donc :
$$\forall x \in [0,1[, \quad g(x) > 0.$$
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a $f(x) > x$, ou encore $f(x) - 1 > x - 1$. En divisant par $x - 1 < 0$, on obtient (puisque $f(1) = 1$) :
$$\forall x \in [0,1[, \quad \frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < 1.$$
On sait enfin que f est dérivable en 1. En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \leq 1.$$
Ceci contredit l'hypothèse $m = f'(1) > 1$. Et finalement, $x_f \neq 1$, c'est-à-dire $\boxed{x_f \in [0,1[.}$

Méthode 2 : avec un tableau de variation
La fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et on a
$$g'(x) = f'(x) - 1 \qquad \text{et} \qquad g''(x) = f''(x) \geq 0.$$
Ainsi, g' est croissante et on a le tableau de variations suivant.

x	0		$\alpha < 1$		1
g'	$g'(0) < 0$		0		$m - 1 > 0$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$g(0) \geq 0$	0	$g(\alpha)$		$g(1) = 0$

D'après le tableau de variations, il existe donc $\alpha \in [0,1[$ tel que $g(\alpha) \leq 0$. Enfin, $g(0) = f(0) \geq 0$ et par théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[0,\alpha] \subset [0,1[$. On en déduit que $x_f \in [0,a]$ et donc que
$$\boxed{x_f \in [0,1[.}$$
On remarque que les fonctions ne sont pas nécessairement strictement monotones, et donc cette solution est un peu imprécise. On pourrait la reprendre et l'adapter...

3. **Méthode 1 : en raisonnant par l'absurde.**
On suppose que $x_f \neq 1$, et donc $x_f \in [0,1[$ avec $f(x_f) = x_f$.
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer l'égalité des accroissement finis entre x_f et 1.
Il existe donc $\alpha \in]x_f, 1[$ tel que $f'(\alpha) = \dfrac{f(1) - f(x_f)}{1 - x_f} = \dfrac{1 - x_f}{1 - x_f} = 1.$
Or f'' est positive donc f' est croissante sur $[0,1]$. Puisque $\alpha < 1$, on a donc $f'(\alpha) = 1 \leq f'(1) = m \leq 1.$

Et donc ces inégalités sont des égalités, et par croissance de f', on a même :

$$\forall x \in [\alpha, 1], \quad f'(x) = 1.$$

f' est constante sur $[\alpha, 1]$, donc f'' est nulle sur cet intervalle. Ceci contredit l'hypothèse $f''(1) > 0$.

Méthode 2 : avec un tableau de variation On reprend le raisonnement précédent. Cette fois $g'(1) = f'(1) - 1 \leq 0$.
On a de plus $g''(1) = f''(1) > 0$ et par continuité de g'', il existe $\varepsilon > 0$ tel que g'' soit strictement positive sur $[1-\varepsilon, 1]$, ainsi, g' est strictement croissante sur $[1-\varepsilon, 1]$ et comme elle est croissante sur $[0, 1-\varepsilon]$, on a

$$\forall x \in [0, 1[, \quad g'(x) < g'(1) = 0.$$

Ainsi, g est strictement décroissante.

x	0		1
g'	$g'(0) < 0$	$\nearrow$	$g'(1) \leq 0$
$g'(x)$	$-$		
g	$g(0) \geq 0$	$\searrow$	0

g est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et $g(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0, 1[,\ g(x) \neq 0$. Par conséquent, on a

$$\boxed{x_f = 1.}$$

Montrons maintenant que il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \neq 1$. On raisonne par l'absurde. Supposons que $u_n = 1$.
La fonction f est continue et strictement monotone donc elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur son image. Puisque $u_n = f(u_{n-1}) = 1$ et $f(1) = 1$, par injectivité de f, on obtient $u_{n-1} = 1$. Par une récurrence descendante, on obtiendrait $u_0 = 1$, ce qui est faux car $u_0 = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1[.}$$

4. D'après les questions précédentes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_f = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1$.

   (a) On a $u_n = 1 - \varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 1) :

   $$u_{n+1} = f(u_n) = f(1 - \varepsilon_n) = f(1) - \varepsilon_n f'(1) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + \underset{n \to +\infty}{o}(\varepsilon_n^2) = 1 - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + \underset{n \to +\infty}{o}(\varepsilon_n^2)$$

   On en déduit que

   $$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + \underset{n \to +\infty}{o}(\varepsilon_n^2) = \varepsilon_n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + \underset{n \to +\infty}{o}(\varepsilon_n)\right)$$

   On passe à l'inverse (possible puisque la suite (ε_n) ne s'annule pas) et en utilisant $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + \underset{u \to 0}{o}(u)$ on trouve

   $$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon_n} \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

   Il en résulte que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \dfrac{1}{\varepsilon_n}\right) = \dfrac{f''(1)}{2}.}$

(b) D'après le théorème de Césaro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}}-\frac{1}{\varepsilon_k}\right)=\frac{f''(1)}{2}$.

Dans la somme, les termes se télescopent et ce qui précède s'écrit

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_n}-\frac{1}{\varepsilon_0}\right)=\frac{f''(1)}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Or $\dfrac{1}{n\varepsilon_0}$ est de limite nulle donc ce qui précède s'écrit aussi

$$\frac{1}{n\varepsilon_n}=\frac{f''(1)}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Et puisque $f''(1)\neq 0$, on a $n\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{f''(1)}$. On a ainsi

$$\boxed{1-u_n=\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{nf''(1)}.}$$

5. (a) Le même calcul que ci-dessus donne

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n\left(m-\frac{\varepsilon_n}{2}f''(1)+\underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n)\right)$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|}=|m|=m\in[0,1[$$

Par règle de D'Alembert, $\sum(\varepsilon_n)$ est donc absolument convergente.

(b) Notons que le cas $m=0$ est impossible d'après le raisonnement de la question **1.c**. On peut donc diviser par $m>0$. En reprenant l'identité ci-dessus, on a

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}=1-\frac{\varepsilon_n}{2m}f''(1)+o(\varepsilon_n)$$

On en déduit que

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right)=\underset{n\to+\infty}{O}(\varepsilon_n)$$

Or $\sum\varepsilon_n$ est absolument convergente, donc par les théorèmes de comparaison

$$\boxed{\sum\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right)=\sum\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)\ \text{converge.}}$$

(c) La série $\sum\ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)=\sum\Big(\ln(m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1})-\ln(m^{-n}\varepsilon_n)\Big)$ est télescopique et comme elle converge, il existe $L\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(m^{-n}\varepsilon_n)=L$.

En prenant l'exponentielle, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} m^{-n}\varepsilon_n=e^L=c>0$. Et donc :

$$\boxed{1-u_n=\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} cm^n\ \ \text{avec}\ \ c>0.}$$