# Devoir non surveillé 19

**à rendre le mardi 4 mars**

## Exercice 1

On note $E$ l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et orienté par sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la droite $D = \text{vect}\{(1,1,0)\}$.
Déterminer la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de la rotation $r$ d'axe $D$ orienté par le vecteur $u = (1,1,0)$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

## Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -5 & 7/2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
2. À l'aide de la calculatrice, trouver les valeurs propres de $A$.
   Déterminer une matrice orthogonale $P$ telle que $P^T AP$ soit diagonale.
3. On pose $M = \dfrac{1}{9}A$. Quelles sont les valeurs propres de $M$ ?
   Calculer $M^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$.

## Problème (questions préliminaires)

- $n$ désigne un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille $(n,n)$ dont la matrice unité est notée $I_n$.
- $E_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n,1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{X^T X}.$$

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on ote $A^T$, la transposée de $A$.
- $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n,\ AA^T = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre $n$.
- $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n,\ \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre $n$.

### Définition 1

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$ s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = Q^T AQ$. (On pourra noter en abrégé : $A$ est **ORTS** à $B$.)

### Questions de cours

**QC1.** Soit $M \in \mathcal{M}_n$ une matrice symétrique réelle. Donner la définition de « $M$ est définie positive ».

**QC2.** Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n$ est symétrique réelle et définie positive alors ses valeurs propres sont dans $]0, +\infty[$.

**QC3.** Réciproquement, montrer que si $M \in \mathcal{M}_n$ est symétrique réelle et si ses valeurs propres sont dans $]0, +\infty[$, alors $M$ est définie positive.

**I - Question préliminaire**

1. Démontrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$, c'est-à-dire que :

- « être **ORTS** à » est *réflexive* : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$, $A$ est **ORTS** à $A$,
- « être **ORTS** à » est *symétrique* : pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$, si $A$ est **ORTS** à $B$ alors $B$ est **ORTS** à $A$,
- « être **ORTS** à » est *transitive* : pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n$, si $A$ est **ORTS** à $B$ et si $B$ est **ORTS** à $C$ alors $A$ est **ORTS** à $C$.

**Remarque :** la notion de relation d'équivalence n'est plus au programme de PCSI, et donc plus au programme de PSI.

---

**Ce qui suit est facultatif**

---

**Problème (suite)**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{R(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{S(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

**Définition 2**

Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $AA^T = A^TA$.

**Objectifs**

- Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

  **($\mathbf{C_1}$)** Il existe un polynôme $P$ à coefficients réels tel que $A^T = P(A)$.

  **($\mathbf{C_2}$)** La matrice $A$ est normale.

  **($\mathbf{C_3}$)** Pour tout $X \in E_n$, $\|A^TX\| = \|AX\|$.

  **($\mathbf{C_4}$)** La matrice $A$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

  — soit de taille $(1, 1)$,

  — soit de taille $(2, 2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, <u>sans démonstration</u>, les deux résultats suivants :

**Théorème 1**

Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.

**Théorème 2**

Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = Q^TAQ$, alors pour tout polynôme $P$ à coefficients réels, on a $P(B) = Q^TP(A)Q$.

**II - Exemples**

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions $\mathbf{(C_1)}$, $\mathbf{(C_2)}$, $\mathbf{(C_3)}$ et $\mathbf{(C_4)}$, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions $\mathbf{(C_1)}$, $\mathbf{(C_2)}$ et $\mathbf{(C_3)}$.

3. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions $\mathbf{(C_2)}$ et $\mathbf{(C_3)}$.

4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
   Montrer que les matrices $rT$, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions $\mathbf{(C_1)}$ et $\mathbf{(C_4)}$.

**III - Deux premières implications**

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

5. Montrer que si $A$ vérifie la condition $\mathbf{(C_1)}$, alors $A$ vérifie la condition $\mathbf{(C_2)}$.

6. Montrer que si $A$ vérifie la condition $\mathbf{(C_2)}$, alors $A$ vérifie la condition $\mathbf{(C_3)}$.

**IV - La condition $(C_3)$ implique la condition $(C_4)$**

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition $\mathbf{(C_3)}$.

7. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).
   *On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *de* $E_2$.
   En déduire que $A$ vérifie la condition $\mathbf{(C_4)}$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition $\mathbf{(C_3)}$.

8. Montrer que pour tout réel $\lambda$, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie $\mathbf{(C_3)}$.

9. En déduire que $A$ et $A^T$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A$ pour qu'elle soit diagonalisable.

11. Pour $n \geqslant 3$, montrer que $A$ est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient $\mathbf{(C_3)}$, avec $p \in \{1, 2\}$.
    *On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à $A$ vérifie* $\mathbf{(C_3)}$.

12. Montrer que si $A$ vérifie la condition $\mathbf{(C_3)}$, alors $A$ vérifie la condition $\mathbf{(C_4)}$.

**V - La condition $(C_4)$ implique la condition $(C_1)$**

Soit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ une famille de $n$ complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme $P$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}.$$

    On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.
    Montrer alors que le polynôme $P$ est réel.

Soient $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(re^{i\theta}) = re^{-i\theta}$.

14. Montrer que $P(rR(\theta)) = (rR(\theta))^T$.
*Lorsque* $\sin(\theta) \neq 0$*, on pourra utiliser la division euclidienne de* $P$ *par le polynôme caractéristique* $\chi$ *de la matrice* $rR(\theta)$ *de* $\mathcal{M}_2$.

15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition $\mathbf{(C_4)}$, alors $A$ vérifie la condition $\mathbf{(C_1)}$.

**VI - Exponentielle d'une matrice normale**

16. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |A_{i,j}|.$$

17. Montrer que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k$.

18. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\mathrm{Exp}(A)$, et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \quad \mathrm{Exp}(Q^T A Q) = Q^T\,\mathrm{Exp}(A) Q.$$

*On pourra montrer que, pour tous* $1 \leqslant i,j \leqslant n$*, la série numérique* $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ *est absolument convergente.*

19. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$.

    Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$ ?

20. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que $\exp(rR(\theta)) = e^{r\cos\theta} R(r\sin\theta)$.
En déduire que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblables aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :
    - soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$,
    - soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On rappelle que $\mathcal{S}_n^{++}$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ définies positives, et on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices $B$ de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les conditions :

- les valeurs propres négatives de $B$ sont de multiplicité paire,
- il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

21. Démontrer que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

22. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i+1 = j \leqslant n \ \text{ ou } \ (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

    est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$ ?