Devoir non surveillé 18 - Correction

Exercice

1. Les colonnes de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale.
   De plus $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E donc :
   $$\boxed{f \text{ est un automorphisme orthogonal de } E.}$$
2. On a $\det(f) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)) = 1$ et $f \neq Id$, donc f est une rotation dont on détermine l'axe.
   Le calcul donne $E_1(f) = \{(x,y,z) \in E,\ f(x,y,z) = (x,y,z)\} = \text{Vect}\{(2,0,1)\}$ donc f est une rotation d'axe $D = \text{Vect}\{(2,0,1)\}$. On oriente D par le vecteur $u = (2,0,1)$ et on détermine l'angle θ de la rotation.
   - D'une part, dans une base adaptée, la matrice de f est de la forme :
     $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
     Ainsi $1 + 2\cos(\theta) = \text{tr}(f) = \dfrac{1}{3}(2-2-1)$ donc $\cos(\theta) = -\dfrac{2}{3}$.
   - D'autre part, le signe de $\sin(\theta)$ est aussi celui de $\det_{\mathcal{B}}(e_1, f(e_1), u)$.
     Or, $\det_{\mathcal{B}}(e_1, f(e_1), u) = \dfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3} > 0$ et donc $\theta = +\text{Arccos}\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

   $$\boxed{f \text{ est la rotation d'axe orienté par } u = (2,0,1) \text{ et d'angle } \theta = +\text{Arccos}\left(-\frac{2}{3}\right).}$$

Problème 1

CCINP PC 2019 Exercice 1

Un corrigé de L. Carrot

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

1. L'application $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0+\infty[$.
   $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.
   Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, en particulier, l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente

2. • L'application $(.|.)$ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   • Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}dt = (Q|P),$$

   donc $(.|.)$ est symétrique.
   • Pour tout $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t}dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale convergente)} \\ &= \lambda(P|R) + (Q|R),\end{aligned}$$

   donc $(.|.)$ est linéaire à gauche.
   • $(.|.)$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
   • Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} \geq 0$.
   D'où, par positivité de l'intégrale $(P|P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geq 0$.
   $(.|.)$ est donc positif.
   • Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $(P|P) = 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0$.
   Or $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt$ converge, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} = 0$, et donc $P^2(t) = 0$, puis $P(t) = 0$.
   Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les éléments de $\mathbb{R}_+$), donc $P = 0$.
   $(.|.)$ est donc bien défini.
   • **Conclusion :** $(.|.)$ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ est convergente d'après la question **1.**
   On effectue une intégration par parties
   Posons $u(t) = t^k$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$.
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
   $u(t)v(t) = -t^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
   Enfin, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ sont convergentes.
   On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt &= [-t^k e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}dt \\ &= 0 + k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

   Par une récurrence simple, on montrerait que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(X^k|1) = k!$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

II.1 - Propriétés de l'application α

4. • Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$ est un polynôme.
De plus, comme $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 \leq n-1$ et $\deg(P'') \leq n-2$, on a

$$\deg(\alpha(P)) \leq \max(\deg(XP''), \deg((1-X)P')) \leq \max(1+n-2, 1+n-1) \leq n,$$

donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc $\alpha : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
• De plus, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') \quad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda X P'' + XQ'' + \lambda(1-X)P' + (1-X)Q' = \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') \\ &= \lambda\alpha(P) + \alpha(Q),\end{aligned}$$

donc α est une application linéaire.

$$\boxed{\alpha \text{ est donc bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

5. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\alpha(X^k) = X(X^k)'' + (1-X)(X^k)' = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1}.$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1}.}$$

On a donc

$$Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha) = Mat_{(1,\dots,X^n)}(\alpha(1),\dots,\alpha(X^n)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

6. Comme $Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha)$ est triangulaire supérieure, son spectre se lit sur la diagonale. On a donc

$$\mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}\left(Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha)\right) = \{-k | k \in [\![0,n]\!]\}.$$

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

7. Comme α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres, toutes ces valeurs propres sont simples.
$-k$ est donc valeur propre simple de α, donc $\dim E_{-k}(\alpha) = \dim(\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$.
8. • Soit (Q_k) une base de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ avec $Q_k \neq 0$.
Notons a le coefficient dominant de Q_k (non nul car $Q_k \neq 0$).
Alors $P_k = \dfrac{1}{a}Q_k$ est un polynôme ayant un coefficient dominant égal à 1.
De plus, $P_k = \frac{1}{a}Q_k \in \mathrm{vect}(Q_k) = \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, donc

$$(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})(P_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) + kP_k = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) = -kP_k.$$

Il existe donc bien un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

• Supposons qu'il existe un autre polynôme $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Alors $R_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{vect}(Q_k) = \mathrm{vect}\left(\frac{1}{a}Q_k\right) = \mathrm{vect}(P_k)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = \lambda P_k$.

De plus, les deux polynômes P_k et R_k ont le même coefficient dominant (1), donc $\lambda = 1$, et, par suite, $R_k = P_k$. On a donc bien l'unicité.

• Il existe donc bien un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

9. Soit $d(k)$ le degré de P_k, avec $d(k) \in [\![0, n]\!]$ car P_k est non nul et $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

Il existe donc $(a_0, \ldots, a_{d(k)}) \in \mathbb{R}^{d(k)+1}$ tels que $P_k = \sum_{i=0}^{d(k)} a_i X^i$ (et $a_{d(k)} = 1$).

Alors on a :

$$\begin{aligned}
\alpha(P_k) &= \sum_{i=0}^{d(k)} a_i \alpha(X^i) \quad \text{(par linéarité de } \alpha\text{)} \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{d(k)} a_i \left(-iX^i + i^2 X^{i-1}\right) \quad \text{(d'après la question 5)} \\
&= \sum_{i=1}^{d(k)} -ia_i X^i + \sum_{i=0}^{d(k)} a_i i^2 X^{i-1}.
\end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs $\alpha(P_k) = -kP_k$ (car $P_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$), on obtient, en identifiant les coefficients dominants :

$$-d(k)a_{d(k)} = -ka_{d(k)} \underset{a_{d(k)}=1}{\Leftrightarrow} -d(k) = -k \Leftrightarrow d(k) = k,$$

donc $\boxed{P_k \text{ est de degré } d(k) = k.}$

10. • On a $\alpha(1) = 0 = -0(1)$ et le coefficient dominant de 1 est 1, donc, par unicité de P_0, on a $P_0 = 1$.

• On a $\alpha(X) = -X + 1$, donc $\alpha(X - 1) = \alpha(X) - \alpha(1) = -X + 1 + 0 = -(X - 1)$, et le coefficient dominant de $X - 1$ est 1, donc, par unicité de P_1, on a $P_1 = X - 1$.

• Le coefficient dominant de $X^2 - 4X + 2$ est 1 et

$$\alpha(X^2-4X+2) = \alpha(X^2)-4\alpha(X)+2\alpha(1) = -2X^2+4X-4(-X+1)+0 = -2X^2+8X-4 = -2(X^2-4X+2),$$

donc, par unicité de P_2, on a $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

11. • Par linéarité de l'intégrale convergente,

$$(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt,$$

où toutes ces intégrales convergent d'après la question 1.

• Posons $u'(t) = tP''(t) + P'(t)$, $u(t) = tP'(t)$, $v(t) = Q(t)e^{-t}$, $v'(t) = Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$u(t)v(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.

Enfin, toutes les intégrales convergent (toujours d'après la question 1).

On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\int_0^{+\infty}(tP''(t)+P'(t))Q(t)e^{-t}dt = \left[tP'(t)Q(t)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)(Q'(t)e^{-t}-Q(t)e^{-t})dt$$
$$= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité de l'intég}$$

donc

$$\begin{aligned}(\alpha(P)|Q) &= \int_0^{+\infty}(tP''(t)+P'(t))Q(t)e^{-t} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt \\ &= -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

12. Par symétrie des rôles de P et Q, on a aussi

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt,$$

donc, par symétrie du produit scalaire,

$$\boxed{(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q)).}$$

13. • Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(\alpha(P_i)|P_j) &= (-iP_i|P_j) = -i(P_i|P_j) \\ \text{et } (\alpha(P_i)|P_j) &= (P_i|\alpha(P_j)) = (P_i|-jP_j) = -j(P_i|P_j),\end{aligned}$$

donc, d'après la question 12, $-i(P_i|P_j) = -j(P_i|P_j)$, donc $(i-j)(P_i|P_j) = 0$, donc, si $i \neq j$, on a $(P_i|P_j) = 0$. La famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est donc orthogonale.

Remarque : On pouvait aussi d'après la question 12, écrire directement que α est un endomorphisme symétrique et donc que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux deux-à-deux.

• De plus, elle est composée de vecteurs non nuls (car le coefficient dominant de ces polynômes vaut 1), donc cette famille est libre.
Comme elle est libre et composée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{La famille } (P_0,\ldots,P_n) \text{ est donc bien une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

14. Remarquons déjà que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = (1|X^k) = k!$ d'après la question 3.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si un n-uplet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ vérifie $(*)$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, en posant $P(X) = X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on doit avoir

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k, \quad \text{ie} \quad k! = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k.$$

Le n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ vérifie donc bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, la ligne k de ce système donne $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt.$

D'où, pour tout polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=0}^n \lambda_i a_k x_i^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^n a_k t^k e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

On a donc bien $(*)$.

15. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est une matrice de Van der Monde, donc inversible car les x_i sont deux à deux distincts.
    Le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$ est donc de Cramer, donc il admet un unique n-uplet solution. D'où l'unicité de $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ vérifiant $(*)$.

Problème 2

Partie 1 :

1. La base $\mathcal{B}$ est orthonormée et la matrice de f dans cette base est symétrique donc

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ est symétrique.}}$$

2. On trouve facilement $\chi_f(X)=(X-4)(X-1)(X-9)$. Ainsi, les valeurs propres de f sont

$$\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=9.$$

   Ces valeurs propres sont toutes de multiplicité 1 donc tous les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

3. Le calcul donne :

$$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \quad E_4 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad E_9 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

   On remarque que ces sous-espaces propres sont bien deux-à-deux orthogonaux.
   Si l'on pose $\overrightarrow{e_1}' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\overrightarrow{e_2}' = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{e_3}' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ alors $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Soit $\overrightarrow{u} \in E$, on note (x_1', x_2', x_3') ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. En utilisant la matrice de f dans cette base, on obtient $f(\overrightarrow{u}) = (x_1', 4x_2', 9x_3')$ et puisque $\mathcal{B}'$ est orthonormée, on a

$$\langle \overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u})\rangle = (x_1')^2 + 4(x_2')^2 + 9(x_3')^2 \geq 0.$$

   Et enfin,$\langle \overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u})\rangle = 0 \iff x_1' = x_2' = x_3' = 0 \iff \overrightarrow{u} = 0$.
   Ainsi $\boxed{f \text{ est un endomorphisme défini positif de } \mathbb{R}^3.}$

5. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$$

   et $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ de sorte que $D = D_1^T.D_1$.
   On a donc, $M = PDP^T = PD_1^T.D_1P^T = (D_1P^T)^T.D_1P^T = N^T \times N$ avec

$$\boxed{N = D_1P^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/\sqrt{2} & 0 & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}.}$$

6. Pour $i = 1,2,3$, on note U_i le vecteur colonne formé des coordonnées de $\overrightarrow{u_i}$ dans la base $\mathcal{B}$.
   - Puisque $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base orthogonale, si $i \neq j$, on a $U_i^T.U_j = 0$.
   - D'autre part, chaque $\overrightarrow{u_i}$ est vecteur propre de f, donc pour $i \in \{1,2,3\}$ il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $MU_i = \alpha_i U_i$.

   Soient $i, j \in \{1,2,3\}$ distincts, calculons $\langle g(\overrightarrow{u_i}), g(\overrightarrow{u_j})\rangle$.

$$(NU_i)^T.NU_j = U_i^T(N^T.N)U_j = U_i^T(MU_j) = \alpha_j U_i^T.U_j = 0.$$

   Ainsi, la famille $(g(\overrightarrow{u_1}), g(\overrightarrow{u_2}), g(\overrightarrow{u_3}))$ est orthogonale. D'autre part, en tant que produit de matrices inversibles, N est une matrice inversible, donc g est un isomorphisme (l'image d'une base par g est une base). Par suite $(g(\overrightarrow{u_1}), g(\overrightarrow{u_2}), g(\overrightarrow{u_3}))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Finalement,

$$\boxed{(g(\overrightarrow{u_1}), g(\overrightarrow{u_2}), g(\overrightarrow{u_3})) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}^3.}$$

7. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ et $(g(\overrightarrow{u_1}), g(\overrightarrow{u_2}), g(\overrightarrow{u_3}))$ sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$. On adopte les mêmes notations que dans la question précédente.
   (a) Si $i \neq j$ on a $\langle \overrightarrow{u_i}, f(\overrightarrow{u_j})\rangle = U_i^T.MU_j = (NU_i)^T.NU_j = \langle g(\overrightarrow{u_i}), g(\overrightarrow{u_j})\rangle = 0$.

(b) Prenons par exemple $i = 1$. $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ donc

$$\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u_1}\} = \left(\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}\right)^{\perp}.$$

Or $\langle \overrightarrow{u_2}, f(\overrightarrow{u_1})\rangle = \langle \overrightarrow{u_3}, f(\overrightarrow{u_1})\rangle = 0$ donc $f(\overrightarrow{u_1}) \in \left(\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}\right)^{\perp}$. Ainsi, $f(\overrightarrow{u_1}) \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u_1}\}$ et comme $\overrightarrow{u_1} \neq 0$, c'est bien un vecteur propre de f.
Ce raisonnement tient encore pour $i = 2$ ou 3. On a donc démontré :

$$\boxed{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \text{ est une base de vecteurs propres de } f.}$$

Partie 2 :

8. C'est un **(E)** de colle.

• Supposons que A soit définie positive :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Par hypothèse sur A, on a $\langle X, AX\rangle = X^T \times AX = \lambda X^T \times X > 0$. Or $X \neq 0$ donc $X^T \times X = ||X||^2 > 0$. Ainsi, $\lambda > 0$.

• Supposons maintenant que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. Puisque A est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormale.

$$\exists P \in \mathcal{O}(n),\ P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_i > 0.$$

Soit alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On a

$$\langle X, AX\rangle = X^T.AX = X^T.PDP^TX = Y^TDY \qquad \text{avec } Y = P^TX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ainsi, $\langle X, AX\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0$. Et donc A est définie positive.

On a bien démontré $\boxed{A \text{ est définie positive} \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \lambda > 0.}$

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

Supposons que $\exists B \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A = B^T \times B$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Puisque B est inversible, $BX \neq 0$.

$$\langle X, AX\rangle = X^T.AX = X^T.B^T \times BX = ||BX||^2 > 0.$$

Ainsi, A est définie positive.

Réciproquement, supposons que A est définie positive.
Puisque A est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormale.

$$\exists P \in \mathcal{O}(n),\ P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_i > 0$. On pose $D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \in GL_n(R)$.

On a donc $D_1.D_1^T = D$ et $A = PDP^T = PD_1.D_1^TP^T = B^T.B$ avec $B = (PD_1)^T$. Or P et D_1 sont inversibles, donc B l'est aussi.

On a bien démontré $\boxed{A \text{ est définie positive} \iff \exists B \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A = B^T \times B.}$

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.
On reprend la construction précédente. Avec les mêmes notations, on a

$$A = PD_1^2P^{-1} = (PD_1P^{-1})^2 = S^2$$

avec $S = PD_1P^{-1} = PD_1P^T$. On a $S^T = PD_1^TP^T = S$ donc S est symétrique. De plus, les valeurs propres de S sont les coefficients diagonaux de D_1, c'est-à-dire $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$. Elles sont strictement positives donc S est une matrice symétrique réelle définie positive qui vérifie $A = S^2$.

Montrons que S est unique.
Soit S' symétrique réelle, définie positive telle que $A = S^2 = (S')^2$. On montre que $S = S'$.
Pour cela, on reprend la construction de S et la matrices D et D_1.
On note $a_1, \dots, a_r$ les coefficients diagonaux distincts de D (c'est-à-dire $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sans les doublons).
Alors les coefficients diagonaux de D_1 sont $\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_r}$.
Comme $a_1, \dots, a_r$ sont distincts, par interpolation de Lagrange, pour tout $b_1, \dots, b_r$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ Q(a_i) = b_i.$$

On choisit $b_i = \sqrt{a_i}$. On a donc un polynôme Q tel que :

$$D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} = Q(D).$$

Et en multipliant par P et P^T à gauche et à droite, on trouve facilement que $S = Q(A)$.
Ainsi $S = Q\Big((S')^2\Big)$ est un polynôme en S' donc S et S' commutent.
Par conséquent, et puisqu'elles sont diagonalisables (th spectral), elles diagonalisent dans une même base (c'est un **(E3)**).
Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\Delta = P^{-1}SP$ et $\Delta' = P^{-1}S'P$ soient diagonales. En élévant au carré, on trouve :

$$\Delta^2 = P^{-1}S^2P = P^{-1}AP = P^{-1}(S')^2P = (\Delta')^2.$$

De plus, comme S et S' sont définies positives, les coefficients diagonaux de Δ et Δ' sont positifs. Et par suite $\Delta = \Delta'$ ou encore $S = S'$.
D'où l'unicité de S.

11. (a) A est inversible, donc d'après la question 9, $\boxed{\text{la matrice } A^T \times A \text{ est symétrique et définie positive.}}$
  (b) La question 10 donne immédiatement l'existence d'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive telle que ${}^tA \times A = S^2$.
  (c) On pose $P = A \times S^{-1}$. Calculons $P^T.P = \ (A \times S^{-1})^T A \times S^{-1} = (S^{-1})^T A^T.AS^{-1} = (S^T)^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ car S est symétrique. Ainsi, $\boxed{P \text{ est une matrice orthogonale.}}$
  (d) L'existence de P et S est donc démontrée. Montrons l'unicité de S.
  Si $A = PS$ alors $A^T.A = S^TP^T.PS = S^T.S = S^2$. Donc d'après la question 10, S est bien unique. Et puisque $P = A \times S^{-1}$, elle est unique également.

Problème 3

Mines-Ponts PC 2024 maths 2

Un corrigé de G. Gallois

1. La matrice (1) est une matrice de Hadamard d'ordre 1.

La matrice $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard d'ordre 2 car $\dfrac{1}{\sqrt{2}} H_2$ est orthogonale.

2. Soit H une matrice de Hadamard. Je note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes de H et $C_1, \cdots, C_n$ ses colonnes.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Notons H' la matrice obtenue par multiplication la ligne L_i par -1. Ses coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$.

  cours : une matrice est orthogonale si et seulement ses lignes forment une BON

  La matrice $\dfrac{1}{\sqrt{n}} H$ est orthogonale donc ses lignes $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} L_1, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} L_i, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} L_n\right)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire euclidien usuel.

  Par conséquent, la famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} L_1, \cdots, \dfrac{-1}{\sqrt{n}} L_i, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} L_n\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ donc la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{n}} H'$ est orthogonale donc H' est une matrice de Hadamard.

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Notons H'' la matrice obtenue en échangeant les lignes L_i et L_j de H. Les coefficients de H'' sont encore dans $\{-1, 1\}$.

  Les lignes de $\dfrac{1}{\sqrt{n}} H''$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} L_1, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} L_j, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} L_i, \cdots, \sqrt{n} L_n\right)$ forment encore une base orthonormée donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} H''$ est une matrice orthogonale donc H'' est une matrice de Hadamard.

- Pour obtenir les résultats analogues sur les colonnes, on peut faire les même raisonnements en utilisant qu'une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut aussi remarquer que H est une matrice de Hadamard si et seulement si H^T est une matrice de Hadamard (car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} H \in \mathcal{O}(n)$ si et seulement si $\dfrac{1}{\sqrt{n}} H^T \in \mathcal{O}(n)$).

3. Pour chaque colonne j de H, si $h_{1j} = -1$, je multiplie la colonne j par -1. On obtient alors une matrice de Hadamard d'après la question précédente dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1.

Supposons que H est une matrice de Hadamard d'ordre n, dont les coefficients de la première ligne sont égaux à 1. On a $HH^T = nI_n$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} H$ est orthogonale.

Donc le coefficient situé sur la première ligne et deuxième colonne de HH^T vaut 0 :

$$0 = [nI_n]_{1,2} = \left[HH^T\right]_{1,2} = L_1 L_2^T = \sum_{k=1}^{n} h_{1,k} h_{2,k} = \sum_{k=1}^{n} h_{2,k} \quad \text{car } h_{1,k} = 1$$

La somme des coefficients sur la ligne 2 de H est donc nulle ; il y a autant de coefficients égaux à 1 que de coefficients égaux à -1 sur les n coefficients de la ligne 2, donc n est pair.

4. Soit H une matrice de Hadamard d'ordre $n \geq 4$.

Commençons par justifier ce qui est demandé :

d'après la question précédente, on peut construire une matrice H' à partir de H dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1.

On a vu aussi à la question précédente, que la somme des coefficients de la deuxième ligne vaut 0 : il y a $n/2$ coefficients égaux à 1 et $n/2$ coefficients égaux à -1. Alors en échangeant les colonnes de H', on peut regrouper les coefficients de la ligne 2, égaux 1 et ceux égaux à -1 pour obtenir une matrice H'' de Hadamard d'après la question 2, dont la première ligne est constituée de 1 et la deuxième composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1.

Supposons maintenant que la première ligne de H est constituée de 1 et la deuxième composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1.
On a $HH^T = nI_n$ donc en regardant les coefficients des lignes 1 et 2 de la colonne 3 :

$$\begin{cases} 0 = & [nI_n]_{1,3} = \left[HH^T\right]_{1,3} = L_1 L_3^T = \sum_{k=1}^n h_{1,k}h_{3,k} = \sum_{k=1}^n h_{3,k} \\ 0 = & [nI_n]_{2,3} = \left[HH^T\right]_{2,3} = L_2 L_3^T = \sum_{k=1}^n h_{2,k}h_{3,k} = \sum_{k=1}^{n/2} h_{3,k} - \sum_{k=n/2+1}^n h_{3,k} \end{cases}$$

En notant, $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} h_{3,k}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=n/2+1}^{n} h_{3,k}$, on a donc $S_1 + S_2 = 0$ et $S_1 - S_2 = 0$ d'où $S_1 = S_2 = 0$.
Par conséquent, parmi les $n/2$ premiers coefficients de la ligne 3 de H, il y a autant de coefficients égaux 1 que de coefficients égaux à -1 donc $n/2$ est pair, et par conséquent, n est un multiple de 4.

5. f est un endomorphisme symétrique (le programme officiel utilise maintenant le vocabulaire autoadjoint) donc d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, constituée de vecteurs propres de f.

6. La famille $(e_k, \cdots, e_n)$ est libre car orthonormée donc $\dim(T_k) = n - k + 1$.
De plus, $S_k + T_k \subset \mathbb{R}^n$, donc $\dim(S_k + T_k) \leq n$.
On a alors par la formule de Grassman

$$\dim(S_k \cap T_k) = \underbrace{\dim(S_k)}_{=k} + \underbrace{\dim(T_k)}_{=n-k+1} - \underbrace{\dim(S_k + T_k)}_{\leq n} \geq 1 \quad \text{d'où} \quad S_k \cap T_k \neq \{0\}$$

7. Soit $x \in S_k \cap T_k$ tel que $\|x\| = 1$.
On décompose x dans $\operatorname{Vect}(e_k, \cdots, e_n)$: $x = \displaystyle\sum_{i=k}^n x_i e_i$.
La famille $(e_k, \cdots, e_n)$ étant orthonormée, on a $1 = \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=k}^n x_i^2$.
De plus, par bilinéarité du produit scalaire :

calcul classique à connaître

$$\begin{aligned} (x, f(x)) = \left(\sum_{i=k}^n x_i e_i, \sum_{j=k}^n x_j f(e_j)\right) = \sum_{k \leq i,j \leq n} x_i x_j \underbrace{(e_i, f(e_j))}_{=(e_i, \lambda_j e_j)} &= \sum_{k \leq i,j \leq n} x_i x_j \lambda_j \underbrace{(e_i, e_j)}_{=\delta_{i,j}} \\ &= \sum_{i=k}^n x_i^2 \underbrace{\lambda_i}_{\geq \lambda_k} \\ &\geq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2 = \lambda_k \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\max_{x \in S_k, \|x\|=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k$$

8. D'après la question précédente, pour tout $S \in \pi_k$, $\displaystyle\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k$ donc

$$\min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right) \geq \lambda_k$$

De plus, pour $S = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$, pour tout $x \in S$, tel que $\|x\| = 1$, par un calcul analogue à la question précédente, en décomposant $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$, on a :

$$(x, f(x)) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \lambda_k = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k$$

Par conséquent :

$$\text{pour } S = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k) \in \pi_k, \quad \max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \leq \lambda_k$$

D'où

$$\min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right) \leq \lambda_k$$

Conclusion :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right)$$

9. Supposons M symétrique positive. D'après le théorème spectral, il existe D matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}(n)$ tel que $M = PDP^T = PDP^{-1}$.

question très classique à savoir faire

Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D, qui sont positifs car M est supposée positive.
Je pose $\Delta = \text{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\sqrt{\lambda_i}$.
Et je pose $B = \Delta P^T$. On a $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$B^T B = P \Delta^T \Delta P^T = P \Delta^2 P^T = PDP^T = M$$

Supposons maintenant que M est symétrique, et admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u.
Pour établir l'existence de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \lambda u.u^T - B^T B$ il suffit d'après la première partie de la question de montrer que $N = \lambda u.u^T - M$ est symétrique positive.

cours : N sym. positive ssi N sym. et $\text{Sp}(N) \subset \mathbb{R}^+$

On a $N^T = (\lambda u.u^T)^T - M^T = \lambda u.u^T - M = N$ donc N est symétrique (et réelle).

Montrons que $\text{Sp}(N) \subset \mathbb{R}_+$.
On note $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ avec $\lambda_1 = \lambda > 0$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\lambda_k \leq 0$.
On considère une base orthonormée

th. spectral appliqué à $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de M où $e_1 = u$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $Me_k = \lambda_k e_k$.

on remarque qu'une base de vecteurs propres de M est aussi une base de vecteurs propres de N On a alors en utilisant $Mu = \lambda u$ et $e_k \in \text{Vect}(u)^\perp$ pour $k \in [\![2, n]\!]$:

$$Nu = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, n]\!], \; Ne_k = \lambda u. \underbrace{u^T e_k}_{=0} - Me_k = -\lambda_k e_k$$

Donc $(u, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de N et $\text{Sp}(N) = \{\lambda, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ car $\lambda > 0$ et $\lambda_k \leq 0$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.
Conclusion : $\lambda u.u^T - M$ est symétrique positive donc il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\lambda u.u^T - M = B^T B$.

10. Par linéarité de la transposée $P^T = I_n^T - \dfrac{1}{n}\left(e.e^T\right)^T = I_n - \dfrac{1}{n}e.e^T = P$ donc P est une matrice symétrique.

De plus, $Pe = \left(I_n - \dfrac{1}{n}e.e^T\right)e = e - \dfrac{1}{n}e.\underbrace{e^T.e}_{=n} = 0$ donc pour tout $x \in \text{Vect}(e), Px = 0$.

je n'ai pas eu besoin d'établir l'égalité $P^2 = P$ dans ma rédaction pour montrer que P est un projecteur, car j'ai directement calculé Px pour $x \in$ Vect(e) puis pour $x \in$ Vect$(e)^\perp$

Et pour tout $x \in \text{Vect}(e)^\perp$, $Px = x - \dfrac{1}{n}e.\underbrace{e^T.x}_{=0} = x$.

On en déduit que P est la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) de la projection sur $\text{Vect}(e)^\perp$ parallèlement à $\text{Vect}(e)$, c'est à dire la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e)^\perp$.

11. On a :

$$Ce^T = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \cdots & \|x_1\|^2 \\ \|x_2\|^2 & \cdots & \|x_2\|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \|x_n\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad eC^T = \left(Ce^T\right)^T = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \|x_2\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \\ \|x_1\|^2 & \|x_2\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|x_1\|^2 & \|x_2\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix}$$

et

$$M_A^T M_A = \left(x_i^T x_j\right)_{1 \le i,j \le n}$$

donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$d_{i,j} = d\left(A_i, A_j\right)^2 = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2(x_i, x_j) = \left[Ce^T\right]_{i,j} + \left[eC^T\right]_{i,j} - 2\left[M_A^T M_A\right]_{i,j}$$

D'où :

$$D = Ce^T + eC^T - 2M_A^T M_A$$

- On a $D \in \Delta_n$ donc D est symétrique et P est aussi symétrique par conséquent,

$$T(D)^T = -\frac{1}{2}P^T D^T P^T = -\frac{1}{2}PDP = T(D)$$

  Donc $T(D)$ est une matrice symétrique.
- De plus, en utilisant la décomposition $D = Ce^T + eC^T - 2M_A^T M_A$, on a :

$$T(D) = -\frac{1}{2}\left(PC\underbrace{e^T P}_{=0} + \underbrace{Pe}_{=0}C^T P - 2PM_A^T M_A P\right) = PM_A^T M_A P \underbrace{=}_{P=P^T} (M_A P)^T M_A P$$

  Donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T T(D) X = X^T (M_A P)^T M_A P X = \|M_A P X\|^2 \ge 0$$

  Donc $T(D)$ est positive.
- Et $T(D)e = -\dfrac{1}{2}PDPe = 0$ car $Pe = 0$ (cf q10).

Donc $T(D) \in \Omega_n$.

12. Soit $A \in \Omega_n$. A est symétrique positive donc d'après la question 9, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^T B$. Notons $x_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les colonnes de B. Alors, on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = x_i^T x_j$. On a alors en utilisant le même calcul qu'à la question 11 :

$$\begin{aligned}[K(A)]_{i,j} &= \left[e.a^T\right]_{i,j} + \left[a.e^T\right]_{i,j} - 2a_{i,j} = a_{i,i} + a_{j,j} - 2a_{i,j} \\ &= \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\|^2 = d(A_i, A_j)^2\end{aligned}$$

où $A_1, \cdots, A_n$ sont les points de $\mathbb{R}^n$ associés aux vecteurs coordonnées $x_1, \cdots, x_n$.
Donc $K(A) \in \Delta_n$.

13. Pour tout $A \in \Omega_n$, en utilisant $Pe = 0$ et $e^T P = (Pe)^T = 0$:

$$T \circ K(A) = -\frac{1}{2}(\underbrace{Pe.a^T P}_{=0} + \underbrace{Pa.e^T P}_{=0} - 2PAP) = PAP = \left(I_n - \frac{1}{n}e.e^T\right) A \left(I_n - \frac{1}{n}e.e^T\right)$$
$$= A - \frac{1}{n}Ae.e^T - \frac{1}{n}e.e^T A + \frac{1}{n^2}e.e^T Ae.e^T$$
$$= A \quad \text{car } Ae = 0 \text{ et } e^T A = (Ae)^T = 0$$

Donc $T \circ K = \mathrm{Id}_{\Omega_n}$.

14. Soit D une matrice à coefficients positifs ou nuls et diagonale nulle.

- Supposons D est MDE, c'est à dire $D \in \Delta_n$.

D'après la question 11, $-\frac{1}{2}PDP = T(D) \in \Omega_n$ donc $T(D)$ est positive.

- Supposons $A = -\frac{1}{2}PDP$ positive. Alors $A \in \Omega_n$. Montrons que $D \in \Delta_n$.

  Remarque : j'ai naturellement envie d'écrire que $-\frac{1}{2}PDP = T(D)$; en admettant $K \circ T = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$, $D = K \circ T(D) = K(A)$ avec $A \in \Omega_n$, et on en déduit (Q12) $D \in \Delta_n$. Mais ceci ne tient pas car pour écrire $D = K \circ T(D)$ sachant que $K \circ T = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$, il faut savoir que $D \in \Delta_n$, ce que l'on souhaite démontrer. On va par conséquent devoir montrer que $K\left(-\frac{1}{2}PDP\right) = D$.

  On a $A = -\frac{1}{2}PDP = -\frac{1}{2}\left(D - \frac{1}{n}De.e^T - \frac{1}{n}e.e^T D + \frac{1}{n^2}e.e^T De.e^T\right)$ donc

  calcul un peu lourd, il y a probablement une solution plus élégante et rapide pour éviter ce calcul mais je ne l'ai pas trouvée

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = -\frac{1}{2}\left(d_{i,j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(d_{i,k} + d_{k,j}) + \frac{1}{n^2}\sum_{1 \le k,\ell \le n} d_{k,\ell}\right)$$

  et l'égalité $K(A) = e.a^T + a.e^T - 2A$ donne : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
[K(A)]_{i,j} &= a_{i,i} + a_{j,j} - 2a_{i,j} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\underbrace{d_{i,i} + d_{j,j}}_{=0} - 2d_{i,j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(d_{i,k} + d_{k,i} + d_{j,k} + d_{k,j} - 2d_{i,k} - 2d_{k,j})\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-2d_{i,j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(d_{k,i} - d_{i,k} + d_{j,k} - d_{k,j})\right) \\
&= d_{i,j} \quad \text{car } d_{i,k} = d_{k,i} \text{ et } d_{j,k} = d_{k,j} \text{ par symétrie de } D
\end{aligned}$$

Donc
$$D = K(A) \in \Delta_n \qquad \text{d'après la question 12}$$

15. Soit D une matrice symétrique à coefficients positifs, de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre λ strictement positive d'espace propre $\mathrm{Vect}(e)$.

pour montrer que D est MDE, il suffit de montrer que $-\frac{1}{2}PDP$ est positive d'après la question précédente

On utilise le résultat de la question 9 : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tel que $D = \lambda e.e^T - B^T B$.

Alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en utilisant $X^T Pe.e^T PX = 0$ car $Pe = 0$:

$$X^T AX = -\frac{1}{2}\left(X^T PDPX\right) = -\frac{1}{2}\left(\lambda X^T Pe.e^T PX - X^T PB^T BPX\right) = \frac{1}{2}\|BPX\|^2 \geq 0$$

Ce qui montre que $A = -\frac{1}{2}PDP$ est positive et donc que D est MDE d'après la question précédente.

16. Soit D une MDE d'ordre n. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_{i,i} = d(A_i, A_i)^2 = 0$ donc en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de D (réelles car D est symétrique) :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}\,(\mathrm{D}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{d}_{\mathrm{i,i}} = 0$$

17. On utilise la décomposition de la question 11, $D = C.e^T + e.C^T - 2(M_A)^T M_A$.
Pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp$, $e^T x = 0$ et $x^T e = 0$ d'où

$$x^T Dx = x^T C.e^T x + x^T e.C^T x - 2x^T (M_A)^T M_A x = -2\|M_A x\|^2 \leq 0$$

18. On applique le théorème de Courant-Fischer démontré à la question 8, à l'endomorphisme canoniquement associé à D, $f : x \mapsto Dx$

$$\lambda_{n-1} = \min_{S \in \pi_{n-1}} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right)$$

Donc en prenant $S = \mathrm{Vect}(e)^\perp \in \pi_{n-1}$:

$$\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp, \|x\|=1} (x, f(x))$$

Or d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp$, $(x, f(x)) = x^T Dx \leq 0$ d'où :

$$\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp, \|x\|=1} (x, f(x)) \leq 0$$

On a donc $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ (q16). D'où

$$\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \geq 0$$

Raisonnons par l'absurde et supposons $\lambda_n = 0$. Alors l'égalité $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ avec $\lambda_i \leq 0$, impliquent $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\mathrm{Sp}(D) = \{0\}$. Mais D est diagonalisable (car symétrique réelle), donc D est semblable à la matrice nulle donc $D = 0$ ce qui est exclu.
Par conséquent,

$$\lambda_n > 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!], \lambda_i \leq 0$$

19.
- $D^T = (U^T \Lambda U)^T = U^T \Lambda^T U = U^T \Lambda U = D$ donc D est symétrique.
- On a pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $u_{i,j} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} h_{i,j} \in \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{-1}{\sqrt{n}} \right\}$.

Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, en utilisant $u_{1,i} = u_{1,j} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ car les coefficients de la première ligne de H sont égaux à 1 ; et si $i \geq 2$, $\lambda_i \leq 0$ et $u_{k,i}u_{k,j} \leq \dfrac{1}{n}$ donc $u_{k,i}\lambda_i u_{k,j} \geq \dfrac{\lambda_i}{n}$:

$$d_{i,j} = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} u_{k,i} \underbrace{\Lambda_{k,\ell}}_{=0 \text{ si } k\neq\ell} u_{\ell,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i}\lambda_k u_{k,j} = \lambda_1 \underbrace{u_{1,i}u_{1,j}}_{=1/n} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{u_{k,i}\lambda_i u_{k,j}}_{\geq \lambda_i/n}$$
$$\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_i = 0$$

Et en remarquant que $u_{k,i}^2 = \dfrac{1}{n}$

$$d_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i}\lambda_k u_{k,i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 0$$

Donc D est à coefficients positifs et diagonale nulle.

- H est une matrice de Hadamard donc $U = \dfrac{1}{\sqrt{n}}H$ est orthogonale donc $D = U^T\Lambda U = U^{-1}\Lambda U$. D et Λ sont semblables donc D et U ont le même polynôme caractéristique :

$$\chi_D = \chi_\Lambda = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$$

Donc $\mathrm{Sp}(D) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ et λ_1 d'ordre de multiplicité 1 (seule valeur propre ¿ 0), donc l'espace propre associé à λ_1 est de dimension 1.

20. D'après la question précédente, D est symétrique à coefficients positifs, à diagonale nulle, et ayant une unique valeur propre strictement positive λ_1, d'espace propre de dimension 1. Pour pouvoir appliquer le résultat de la question 15, il ne reste plus qu'à vérifier que $De = \lambda_1 e$.

On a $D = U^T\Lambda U = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U$; d'après la formule de changement de bases, les colonnes de U^T sont des vecteurs propres de D associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Or la première colonne de U^T est $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}e$ d'où $De = \lambda_1 e$.

Conclusion : la matrice D vérifie toutes les conditions de la question 15 donc D est une MDE.

21. On suit le processus de construction de la matrice D décrit au début de cette partie.
On choisit une matrice de Hadamard, dont les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

D'après la question 20, la matrice $D = \dfrac{1}{4}H^T\Lambda H$ est une MDE ; on trouve $D = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.