Devoir non surveillé 18

à rendre le mardi 25 février

1 - Travail en autonomie :

- Revoir son cours de première année sur les fonctions numériques. **Compléter et apprendre** le paragraphe 18.1 du chapitre *Fonctions numériques, fonctions vectorielles*. Voir aussi le Vade Mecum.
- Revoir son cours de première année sur les équations différentielles. Lire avec attention les paragraphes 17.1 et 17.2 du chapitre *Équations différentielles*. **Compléter** les pages 428 et 429 (recherche de solutions particulières). Voir aussi le Vade Mecum.

2 - Travail à rendre :

La première partie (Exercice, problèmes 1 et 2) est obligatoire, la seconde est facultative.

3 - Révisions en vue des concours :

• Revoir ses copies de DS/DNS et comprendre ses erreurs.

• **Mardi 24 février de 9h à 10h en salle Galois : grande interrogation sur le cours des chapitres suivants :**

↪ Chapitre 3 : Suites numériques (une lecture attentive devrait suffire)
↪ Chapitre 4 : Séries numériques
↪ Chapitre 5 : Rappels sur l'intégration
↪ Chapitre 6 : Intégrales impropres
↪ Chapitre 7 : Révisions d'algèbre linéaire (une lecture attentive devrait suffire)
↪ Chapitre 8 : Calcul matriciel et déterminant (une lecture attentive devrait suffire)
↪ Chapitre 9 : Réduction
↪ Chapitre 10 : Suites et séries de fonctions
↪ Chapitre 11 : Séries entières
↪ Chapitre 14 : Espaces préhilbertiens réels
↪ Chapitre 15 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien
↪ Chapitre 18 : Fonctions numériques, fonctions vectorielles (seulement le paragraphe 18.1)

Les **(E)** et **(D)** suivants sont aussi à connaître pour cette interrogation.

(E1) : Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, puis montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.

(E1) : Déterminer la nature de $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

(E1) : Nature des séries $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ et/ou $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^2(n)}$.

(E1) : Nature de la série $\sum \dfrac{1}{n}$ par comparaison à une intégrale.

(E1) : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge, puis la calculer.

(E1) : Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ est convergente, puis à l'aide d'un changement de variable, qu'elle vaut 0.

(E1) : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

(E1) : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ et démontrer que Γ est strictement positive.

(E1) : Soit $f : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$ lorsque (et/ou au choix de l'examinateur) :

1. f est bornée.
2. f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On justifiera l'existence de l'intégrale.

(E1) : Montrer que le sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions paires et le sous-espace $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont supplémentaires dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(E1) : Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $f_i : x \longmapsto e^{\alpha_i x}$.
Montrer que $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(E1) : Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts et $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ la base de Lagrange associée à $a_0, \dots, a_n$.

1. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
2. Reconnaitre $L_0(X) + \dots + L_n(X)$ et $a_0 L_0(X) + \dots + a_n L_n(X)$

(E1) : Savoir trouver une base du noyau, une base de l'image d'une matrice 3×3 sans hésitation.
Calculer le déterminant d'ordre n suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

(E1) : Démontrer rapidement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(E1) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que si f est de rang 1, alors il possède au moins une valeur propre.
- Montrer que si $x \in E$ est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \mathrm{Im}(f)$.

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 11$.
Calculer le polynôme caractéristique de A.

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux-à-deux équivalentes.

1. A est nilpotente
2. $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$
3. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$
4. $A^n = 0$

(E1) : On pose $\forall t \in [0, 1],\ f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

(E1) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergence uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On pourra utiliser la formule de Stirling.

(E1) : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction zeta de Riemann définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et exprimer $\zeta'(x)$ à l'aide d'une série.

(E2) : Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n(\pi + t)dt$.

(E2) : Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt$.

(E1) : Déterminer le rayon de convergence et la somme de $f = \sum n^2 t^n$.

(E1) : Prolonger par continuité en 0 la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ et montrer que la fonction f obtenue est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

(E1) : On convient que, si $p \notin [\![0, n]\!]$, alors $\dbinom{n}{p} = 0$.

Montrer alors que pour tous entiers naturels p, n, m, on a : $\boxed{\dbinom{n+m}{p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}.}$

(E1) : Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n.$$

(E1) : Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

(E1) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov.

(E1) : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (définition et démonstration).

(E1) : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'égalité $\mathrm{tr}(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i\rangle$.

(E1) : Savoir trouver rapidement une distance d'un vecteur à un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

(E1) : Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

(E1) : Les symétries orthogonales sont des endomorphismes autoadjoint.

(E1) : Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

(E1) : Les symétries orthogonales sont des endomorphismes autoadjoint.

(E1) : Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et si λ, μ sont des valeurs propres distinctes de u alors $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$.

(D1) : Description complète de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

(E1) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
On pourra aussi demander la version matricielle.

(E1) : Savoir diagonaliser une matrice symétrique réelle 3×3 en base orthonormée.

(E1) : On note E la fonction *partie entière* et on considère $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) + E(-x)$.
Démontrer que la fonction f n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.

(E1) : Soit $f : [0, 1] \longmapsto [0, 1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

(E1) : Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

(E1) : Calculer de deux façons la dérivée $n-$ième de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

(E1) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(E1) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$.

• S'il vous reste du temps, revoir les autres chapitres et tous les autres **(E)** et **(D)** pour anticiper les révisions aux concours.

Sujet à rendre : ne pas utiliser de corrigé en ligne !

Exercice 1

On munit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et on oriente E par la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que f est un automorphisme orthogonal de E.
2. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Problème 1

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Calculer $(X^k \mid 1)$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

4. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
6. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0,n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

7. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
8. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
9. Justifier que P_k est de degré k.
10. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

11. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
12. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.
13. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \dots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

14. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

15. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$

Problème 2

Partie 1 : Dans cette partie, on désigne par E l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire usuel noté $\langle\ ,\ \rangle$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique de E, on dira que φ est **défini positif** si :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}, \quad \langle \overrightarrow{u}, \varphi(\overrightarrow{u}) \rangle > 0.$$

On considère l'endomorphisme f de E défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'endomorphisme f est symétrique.
2. Calculer le polynôme caractéristique de f. Quelles sont les valeurs propres de f?
   On les notes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.
3. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
4. Démontrer que f est un endomorphisme défini positif de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = N^T \times N$. Dans la suite, on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = N$.
6. Montrer que si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base orthogonale de vecteurs propres de f alors $(g(\overrightarrow{u_1}), g(\overrightarrow{u_2}), g(\overrightarrow{u_3}))$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
   On pourra utiliser l'écriture matricielle du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.
7. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ et $(g(\overrightarrow{u_1}), g(\overrightarrow{u_2}), g(\overrightarrow{u_3}))$ sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que pour $i \neq j$ on a $\langle \overrightarrow{u_i}, f(\overrightarrow{u_j}) \rangle = 0$.
   (b) En déduire que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de vecteurs propres de f.

Partie 2 : On munit ici l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel.

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \qquad \langle X, Y \rangle = X^T \times Y.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On dira que A est **définie positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle X, AX \rangle > 0.$$

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Démontrer l'équivalence suivante.

$$A \text{ est définie positive} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad \lambda > 0.$$

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Démontrer l'équivalence suivante.

$$A \text{ est définie positive} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists B \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A = B^T \times B.$$

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.
    Démontrer qu'il existe une unique matrice S définie positive, telle que $A = S^2$.

11. On démontre dans cette question le théorème de décomposition polaire suivant.

Proposition (Théorème de décomposition polaire)

Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice P orthogonale et une unique matrice S symétrique définie positive telles que

$$A = P \times S.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

(a) Démontrer que la matrice $A^T \times A$ est symétrique et définie positive.
(b) En déduire qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive telle que $A^T \times A = S^2$.
(c) On pose $P = A \times S^{-1}$. Vérifier que P est une matrice orthogonale.
(d) L'existence de P et S est donc démontrée. Justifier qu'elles sont uniques.

Sujet facultatif : ne pas utiliser de corrigé en ligne !

Problème 3

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- On note (x, y) (resp. $X^T Y$) le produit scalaire usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ (resp. X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié canoniquement à $\mathbb{R}^n$) et $\|x\|$ la norme de x (resp. $\|X\|$ la norme de X) associée au produit scalaire.
- Étant donnés deux points P et P' de $\mathbb{R}^n$, on note $d(P, P')$ la distance entre P et P' associée à la norme euclidienne usuelle :
$$d(P, P') = \left\| \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} \right\|$$
où O est le point d'origine.
- Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit *positif* si
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \, (x, f(x)) \geq 0 \, .$$
Une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \, , \, X^T A X \geq 0 \, .$$
- Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si, et seulement si, sa matrice (symétrique) dans $\mathcal{B}$ est positive.
- On appelle *matrice de distance euclidienne* (on notera MDE pour abréger) une matrice carrée $D = (d_{i,j})$ d'ordre n telle qu'il existe un entier naturel non nul m et des points $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^m$ tels que, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots\}^2$, on a :
$$d_{i,j} = d(A_i, A_j)^2 \, .$$

On se propose dans ce sujet d'apporter une réponse partielle au problème consistant à déterminer, étant donnés des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, une MDE de spectre $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
On admet sans démonstration dans ce sujet que des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ sont positifs si et seulement si leur spectre est inclus dans $[0, +\infty[$.

1 - Matrices de Hadamard

On appelle *matrice de Hadamard* d'ordre n toute matrice H carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou -1 et telle que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}H$ soit orthogonale.

1. Donner des exemples de matrices de Hadamard d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que si H est une matrice de Hadamard alors toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de H est encore une matrice de Hadamard.
3. Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. En déduire que si $n \geq 2$ alors n est pair.
4. Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4, alors n est multiple de 4. On pourra commencer par montrer que l'on peut supposer la première ligne de H uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1.

2 - Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres classées par ordre croissant de f. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on introduit l'ensemble π_k des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérées).

5. Justifier l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f, le vecteur e_i étant associé à λ_i pour tout $i \in \{1, \ldots\}$. On garde par la suite cette base.
6. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et S_k un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On pose : $T_k = \operatorname{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$.

   Justifier que : $S_k \cap T_k \neq \{0\}$.
7. En considérant $x \in S_k \cap T_k$, justifier que :
$$\max_{x \in S_k\,,\,\|x\|=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k\,.$$
8. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide de $S = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \in \pi_k$, montrer l'égalité :
$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S\,,\,\|x\|=1} (x, f(x)) \right).$$

   C'est le théorème de Courant-Fischer. On aura également besoin par la suite du résultat de factorisation suivant.
9. Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M est positive, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = B^T \cdot B$. En déduire que si M n'est plus supposée positive, mais admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \lambda\, u \cdot u^T - B^T \cdot B$.

3 - Caractérisation des MDE

On note $\mathbf{e}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note Δ_n l'ensemble des MDE d'ordre n et Ω_n l'ensemble des matrices M symétriques positives d'ordre n telles que $M \cdot \mathbf{e} = 0$. On note enfin P la matrice d'ordre n définie par :
$$P = I_n - \frac{1}{n}\,\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T\,.$$

On note T l'application de Δ_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à D associe :

$$T(D) = -\frac{1}{2}\, P \cdot D \cdot P$$

et K l'application de Ω_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à une matrice A associe :

$$K(A) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T - 2\,A$$

où $\mathbf{a}$ est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de A.

10. Montrer que P est symétrique et que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé est une projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\mathbf{e})^\perp$.
11. Soit $D \in \Delta_n$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points dont la matrice D est la matrice de distance euclidienne. On note x_i les vecteurs coordonnées des A_i. Soient M_A la matrice dont les colonnes sont les x_i et C la colonne formée des $\|x_i\|^2$. Écrire D comme combinaison linéaire de $C \cdot \mathbf{e}^T$, $\mathbf{e} \cdot C^T$ et $M_A^T \cdot M_A$. En déduire que, pour toute matrice D de Δ_n, on a $T(D) \in \Omega_n$.
12. Montrer que, pour toute matrice A de Ω_n, on a $K(A) \in \Delta_n$.
13. Montrer que les applications $T : \Delta_n \to \Omega_n$ et $T : \Omega_n \to \Delta_n$ vérifient :

$$T \circ K = \mathrm{Id}_{\Omega_n}\,.$$

    On peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que l'on a également $K \circ T = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$ et que ces deux applications sont bijections réciproques l'une de l'autre.
14. Montrer qu'une matrice symétrique D d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle est MDE si et seulement si $-\dfrac{1}{2}\, P \cdot D \cdot P$ est positive.
15. Montrer que toute matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre $\mathbf{e}$ est MDE.

4 - Spectre des MDE

On conserve ici les notations de la partie précédente.

16. Préciser la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ des valeurs propres d'une MDE d'ordre n.
17. Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(\mathbf{e})^\perp$, on a :

$$x^T \cdot D \cdot x \leq 0\,.$$

18. Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant. Montrer que $\lambda_{n-1} \leq 0$ et en déduire que D a exactement une valeur propre strictement positive.

5 - Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0\,.$$

On note U la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\, H$ et Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i. On note enfin $D = U^T \cdot \Lambda \cdot U$.

19. Montrer que D est symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle, et a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, avec λ_1 d'espace propre de dimension 1.
20. Montrer que D est MDE.
21. Donner une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\{5, -1, -2, -2\}$.

Remarquons pour finir que la portée de ce résultat est à nuancer, car outre les conditions sur les ordres possibles pour les matrices de Hadamard, on ne sait même pas s'il existe de telles matrices pour tout ordre multiple de 4 ! D'autre part, il existe évidemment des matrices de distance euclidienne d'ordre impair…