Devoir non surveillé 17

à rendre le mardi 4 février

Exercice 1

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}_n[X]$ celui des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On définit une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}.$$

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta$.

1. Démontrer que $(P, Q) \longmapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer T_2, T_3 et T_4.
3. Déterminer le degré de T_n, son coefficient dominant et étudier la parité de T_n.
   On démontrera soigneusement le résultat.
4. Calculer $T_n(1), T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'un polynôme P vérifie la propriété (p_n) si $\forall\theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n vérifie la propriété (p_n).
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant la propriété (p_n). Montrer que $P = T_n$.
6. On suppose dans cette question que $n \geq 1$ et on étudie les racines de T_n.
   (a) Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ a-t-on $T_n(\cos(\theta)) = 0$?
   (b) En déduire que T_n possède n racines, qu'elles sont distinctes et qu'elles sont dans $[-1, 1]$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(T_n|T_n)$.
8. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ distincts. Calculer $(T_n|T_m)$.
9. En déduire une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$.
10. On définit l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$.
    Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
11. Déterminer la matrice de Φ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
12. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
13. Calculer $\Phi(T_n)$. En déduire les sous-espaces propres de Φ.
14. Démontrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ce qui suit est facultatif

Problème Partie 1

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on appelle fonction polynomiale sur I toute fonction de la forme $f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$ où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I - Résultats préliminaires

IA - Étude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.
2. À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. Montrer que pour tout $x \in \,]-R, R[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$.

   On pourra effectuer une permutation des symboles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ *que l'on justifiera soigneusement.*

IB - Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

5. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

6. Montrer que $\displaystyle\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i$.
7. Montrer enfin que $\displaystyle\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$.

II - Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

8. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
9. En déduire que, si $(f, g) \in E_\alpha^2$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$ est convergente.
10. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
11. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}.$$

$$\psi_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-\alpha} e^{x} \varphi_n^{(n)}(x).$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale.
Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$.

14. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par :

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{pour } f \in E_\alpha.$$

15. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que :

$$\varphi_n^{(k)}(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

$$\text{et que } \varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \text{ quand } x \to +\infty.$$

16. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$.
En déduire que la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\ \Gamma(n + \alpha + 1)$.
On rappelle que la fonction Γ a été définie dans la partie I.

III - Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction $f_k : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-kx}$ qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0\leq n\leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ et calculer sa valeur.
19. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) \text{ si } t \in]0, 1] \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$ *et le résultat admis suivant :*
Si $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$.

22. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.
23. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ avec $A > 0$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-x^2/2} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 22) à $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto h(\sqrt{x}) e^{x/2}$ *et à un* α *bien choisi.*

On peut montrer que le résultat de la question 23) est en réalité valable pour tout $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.