Devoir non surveillé 16 - Correction

Thème : Variables aléatoires, séries entières

Exercice 1
E3A PC 2017

à partir d'un corrigé (un peu succinct) de M. Bourgade

1. (a) Vu que la série $\sum j(j-1)\mathbb{P}(X=j)$ converge absolument (le temr général est négligeable devant $1/j^2$), le théorème de transfert affirme que $X(X-1)$ est d'espérance finie et que

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)\mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{(j-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2.$$

(b) On a $X^2 = X(X-1)+X$ est la somme de deux v.a.r.d. d'espérances finies. Par linéairité de l'esp l'espérance, X^2 aussi et :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}(X(X-1)+X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \lambda^2+\lambda.$$

2. Puisque X^2 est d'espérance finie, le théorème de transfert donne (réciproque) :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=0}^{+\infty} j^2\mathbb{P}(X=j).$$

Soit $i\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$i^2\mathbb{P}(X\geq i) = i^2\sum_{j=i}^{+\infty}\mathbb{P}(X=j) \leq \sum_{j=i}^{+\infty} j^2\mathbb{P}(X=j) \leq \mathbb{E}(X^2) = \lambda^2+\lambda.$$

D'où : $\forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(X\geq i\right) \leq \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$. C'est aussi la seconde inégalité de Markov.

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{i^2}$ converge, il en est de même pour la série $\sum\mathbb{P}\left(X\geq i\right)$.

3. (a) On a $u_{i,k}>0$ et $\dfrac{u_{i+1,k}}{u_{i,k}} = \dfrac{\lambda}{k+i+1}$ donc :

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{u_{i+1,k}}{u_{i,k}} = 0 < 1.$$

Ainsi, par la règle de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{i\geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

(b) On a $0\leq u_{i,k}\leq\left(\dfrac{\lambda}{k}\right)^i$. Ainsi, pour $k>\lambda$ on a $0<\dfrac{\lambda}{k}<1$ et la série géométrique de raison $\dfrac{\lambda}{k}$ converge.

D'où pour toute constante $K\geq\lambda$ et pour tout entier $k\geq K$, on a : $\displaystyle R_{n,k} = \sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k} \leq \sum_{i=n}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{k^i}$.

4. (a) Soit un entier k tel que $k > \lambda$. On a :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = \left(1 + \sum_{i=k+1}^{+\infty} u_{i-k,k}\right) \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^i \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{k-\lambda} \mathbb{P}(X = k).$$

Si on a de plus $k \geq 2\lambda$, alors :

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X = k) \leq \left(\frac{k}{k-\lambda} - 1\right) \mathbb{P}(X = k) \leq \mathbb{P}(X = k).$$

(b) Comme $k \geq 1 \geq 2\lambda$, on a :

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

(c) Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dans le cas général, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X \geq i\right)$.

Et donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X \geq i\right) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{P}\left(X \geq 0\right) = \mathbb{E}(X) + 1$.

5. (a) Une étude triviale des variations de la fonction réelle définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1$ montre qu'elle est à valeurs positives. On pouvait aussi utiliser la convexité de la fonction exponentielle. D'où : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leq \mathrm{e}^{-t}$.

(b) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{n^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{n^k}{k!} \exp\left(-\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k-1} i\right) = \frac{n^k}{k!} \exp\left(-\alpha(n,k)\right).$$

(c) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \leq \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\alpha(n,k)} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}(n-k)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{\beta(n,k,\lambda)}.$$

(d) Soit $k \geq 2\lambda + 1$. Alors $\beta(n,k,\lambda) \leq 0$ et par suite $\mathbb{P}(Y = k) \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X = k)$.

(e) Soit $k \geq 2\lambda + 1$. On a : $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}\left(Y = j\right) \leq \sum\limits_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}\left(X = j\right) \leq \mathbb{P}(X > k) \leq \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Exercice 2

CCINP PC 2022

à partir d'un corrigé de B. Groux

Partie I - Étude de la longueur de la première série

1. D'après le cours :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad R = 1.}$$

2. D'après le cours, la somme d'une série entière de la variable réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier, soit $x \in]-1,1[$. La série de terme général kx^{k-1}, $k \in \mathbb{N}^*$, converge de somme $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par x et en constatant que le terme d'indice $k=0$ est nul, on en conclut que $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 0} kx^k \text{ converge et qu'on a } \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k =}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(L_1 = k)$ est réalisé si et seulement si la première série est de longueur k, c'est-à-dire les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$-ième lancer donne un résultat différent. On a donc

$$\boxed{(L_1 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1})}.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ étant incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(L_1 = k) = \mathbb{P}\left(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}\right) + \mathbb{P}\left(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}\right) .$$

Par indépendance des lancers, on a alors

$$\mathbb{P}(L_1 = k) = \mathbb{P}(P_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(P_k) \times \mathbb{P}(F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(L_1 = k) = 2^{-k}}$.

5. Par définition, la variable aléatoire L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La série de terme général $\mathbb{P}(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc de somme 1. On a alors $\mathbb{P}(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$. Or, $\dfrac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $]-1,1[$ donc, d'après la question 1, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} == 1 \,.$$

On a ainsi $\boxed{\mathbb{P}(L_1 = 0) = 0}$.

6. D'après la question 4, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k\mathbb{P}(L_1 = k) = k \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$. Cette égalité est aussi valable lorsque $k = 0$. Or, d'après la question 2, la série $\sum_{k\geq 0} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ converge de somme $\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$. En particulier, la série de terme général $k\mathbb{P}(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc, par positivité, converge **absolument** de somme 2, ce qui signifie que :

$$\boxed{L_1 \text{ admet une espérance donnée par } E(L_1) = 2.}$$

Ainsi, en moyenne, la première série dans la suite de lancers est de longueur 2.

On aurait aussi pu utiliser le vocabulaire des familles sommables pour la rédaction de cette question.

Partie II - Étude du nombre de séries

7. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1. Donc $N_1 = 1$ (égalité de fonctions).
La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents. $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2 = 1) &= \mathbb{P}((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) \\
&= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) \qquad \text{(incompatibilité)} \\
&= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc nécessairement $\mathbb{P}(N_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(N_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
En conclusion, $\boxed{N_1 \text{ suit la loi certaine de valeur } 1}$ et $\boxed{N_2 \text{ suit la loi uniforme sur } \{1; 2\}}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat).

$$\boxed{N_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Si l'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé et si le nombre de séries dans les $n+1$ premiers lancers est k, alors le n-ième et le $(n+1)$-ième lancers donnent le même résultat, donc ils sont tous les deux dans la dernière série observée et on a $N_n = k = N_{n+1}$.

On a par le même raisonnement l'inclusion inverse et donc l'égalité d'évènements :

$$\boxed{(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}}.$$

Puisque les évènements $(N_n = k)$ et P_n sont indépendants du $(n+1)$-ième lancer, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n)\mathbb{P}(P_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n)}.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ décrivent les quatre résultats possibles pour les n-ième et $(n+1)$-ième lancers. Ils sont donc deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'évènement certain, formant ainsi un système complet d'évènements.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{n+1} = k) &= \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\
&\quad + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n) \qquad \text{(question 9)} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap (P_n \cup F_n)) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap (P_n \cup F_n)) \qquad \text{(incompatibilité)}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1)}$.

11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 10, on a

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_{n+1} = k)x^k &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1)\right) x^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)x^k\,. \end{aligned}$$

Or, on a $\mathbb{P}(N_n = n+1) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k)x^k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)x^k = G_n(x)$. Par ailleurs, en effectuant un changement d'indice dans la seconde somme, et puisque $\mathbb{P}(N_n = 0) = 0$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)x^k = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)x^{j+1} = x\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)x^j = xG_n(x)$$

car $\mathbb{P}(N_n = 0) = 0$. On en conclut qu'on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}G_n(x) + \frac{1}{2}xG_n(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x)}$.

12. Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé). La suite $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$.

 On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{G_n(x) = x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme définissant G_n étant finie, la fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 1 et, d'après le cours, $\boxed{N_n \text{ admet une espérance égale à } G_n'(1)}$.
 D'après la question 12, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n'(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} + x.(n-1).\frac{1}{2}.\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}$$

 donc, en particulier, on a $G_n'(1) = 1 + \dfrac{n-1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$. En conclusion, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(N_n) = G_n'(1) = \frac{n+1}{2}}$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la variable aléatoire N_n prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
 La fonction G_n est polynomiale sur $\mathbb{R}$. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)x^k$.

 Par ailleurs, d'après la question 12, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n(x) = x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2^{n-1}}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}x^k\,.$$

 Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale sur un intervalle,

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}}\,.$$