Devoir non surveillé NC 16

Thème : Variables aléatoires, séries entières

à ne pas rendre...

Exercice 1

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P(X=j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

1. (a) Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.
2. Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X \geq i) \leq \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.
   Que peut-on en déduire pour la série de terme général $P(X \geq i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?
3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq K$, on a : $R_{n,k} \leq \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}$.
4. (a) Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $P(X \geq k) \leq \dfrac{k}{k-\lambda} P(X=k)$.
   Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $P(X > k) \leq P(X=k)$.
   (b) Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.
   Montrer à l'aide des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} P(X \geq i) \leq 1$.
   (c) Dans le cas général, que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(X \geq i)$? Le justifier.
5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$.
   Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.
   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1-t \leq \mathrm{e}^{-t}$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \dots,\ n\},\ \dbinom{n}{k} \leq \dfrac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.
   (c) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \dots,\ n\},\ P(Y=k) \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda+1-k)}{2n}$.
   (d) Quelle majoration de $P(Y=k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda+1$?
   (e) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda+1$: $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} P(Y=j) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Exercice 2

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement « *le k-ième lancer de la pièce donne pile* » et par F_k l'évènement « *le k-ième lancer de la pièce donne face* ».
On appelle série une succession de lancers amenant tous le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 : $\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n}^\circ 1} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n}^\circ 2} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n}^\circ 3} \cap F_8 \cap \cdots.$

Exemple 2 : $\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n}^\circ 1} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n}^\circ 2} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k\right)}_{\text{Série n}^\circ 3}.$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient toujours pile, ou toujours face), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

1. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière : $\displaystyle\sum_{k\geq 0} x^k$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} kx^k$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(L_1 = k) = 2^{-k}$.
5. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(L_1 = 0)$.
6. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4\,.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

7. Déterminer les lois de N_1 et N_2.
8. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

9. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\,,$$

puis en déduire que :

$$\mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k) \cap P_n\right)\,.$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$\mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k) \cap F_n\right)\,,$$

$$\mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k-1) \cap P_n\right)\,,$$

$$\mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k-1) \cap F_n\right)\,.$$

10. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$\left(P_n \cap P_{n+1},\ F_n \cap F_{n+1},\ F_n \cap P_{n+1},\ P_n \cap F_{n+1}\right)$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1)\,.$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(N_m = k)x^k\,.$$

Ainsi, si on note $a_k(m) = \mathbb{P}(N_m = k)$ alors : $G_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k(m)x^k$ et d'après la question 10 :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!], \qquad a_k(m+1) = \frac{1}{2}a_k(m) + \frac{1}{2}a_{k-1}(m). \tag{1}$$

On déduit aussi des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x$.

11. Déduire de (1) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation : $G_{n+1}(x) = \dfrac{1+x}{2}G_n(x)$.
12. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
13. Calculer l'espérance de la variable aléatoire N_n.
    On pourra en justifiant, dériver G_n.
14. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.