Devoir non surveillé 15 - Correction

Remarques générales

• Quand on écrit $\sum_{k=1}^{+\infty}$... cela signifie qu'on a d'abord justifié l'existence (convergence de la série) ou bien que les termes sont positifs et que l'on fait directement les calculs dans $[0, +\infty]$. Le raisonnement doit alors être très clair.

• Attention aux unions disjointes qui ne le sont pas...

• Les dérivées de séries géométriques ne sont pas des théorèmes du cours. Il faut les justifier rapidement.

• Quand la X est à valeur dans $\mathbb{N}$, on peut utiliser la seconde expression de l'espérance.

• L'utilisation du théorème de transfert doit se faire avec rigueur. Voir pour la rédaction, les calculs de variances du cours (on calcule $E(X^2)$).

• En probabilité aussi il y a des raisonnements... qui s'appuient sur des théorèmes de cours à connaître.

• Encore beaucoup trop de confusions entre f et $f(x)$.

• Les abréviations doivent être marginales et mentionnées.

• Les mots, les phrases doivent être écrits en entiers.

• J'ai lu de bonnes choses dans la rédaction pour montrer les convergences normales.

Exercice 1

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

1. On a immédiatement $p_K \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

   On peut faire les calculs en dérivant deux fois la série géométrique. On donne ici une rédaction qui évite d'écrire les calculs.
   Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. D'après le cours :

   $$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

   En multipliant par p, on trouve bien : $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

   $$\boxed{\text{La suite } (p_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

2. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = p_k$.
   On considère la série géométrique. En tant que série entière, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et on peut dériver terme à terme. On obtient en dérivant 3 fois :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-3} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

On évalue les deux dernières en $x = 1-p \in]0,1[$. On remarque que ces deux sommes peuvent aussi commencer à 1 puisque le premier terme est nul.

$$\frac{2}{p^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} \quad \text{et} \quad \frac{6}{p^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-3}.$$

Et donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p^2(1-p)^{k-1} = p^2(1-p)\frac{2}{p^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} |(k-1)P(X=k| < +\infty.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)p^2(1-p)^{k-1} = p^2(1-p)^2\frac{6}{p^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} |(k-1)(k-2)P(X=k| < +\infty.$$

Par le théorème de Transfert, $X-1$ et $(X-1)(X-2)$ sont d'espérance finie et on a :

$$\boxed{E(X-1) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)P(X=k) = \frac{2(1-p)}{p}} \text{ et } \boxed{E((X-1)(X-2)) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(k-2)P(X=k) = \frac{6(1-p)^2}{p^2}}$$

3. On a $X = (X-1)+1$ donc par linéarité de l'espérance X est d'espérance finie.
   Et de même $X^2 = (X-1)(X-2)+3X-2$ donc X^2 est d'espérance finie.
   La linéarité de l'espérance donne aussi les égalités suivantes.

$$E(X) = E(X-1)+1 = \frac{2(1-p)}{p} + 1 = \frac{2-p}{p}.$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = E((X-1)(X-2)) + 3E(X) - 2 - E(X)^2 \\ &= \frac{6(1-p)^2}{p^2} + 3\frac{2-p}{p} - 2 - \frac{(2-p)^2}{p^2} \\ &= \frac{1}{p^2}\Big(6(1-2p+p^2) + 3p(2-p) - 2p^2 - (4-4p+p^2)\Big) = \frac{2(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Le calcul de $P(X > k)$ est dans le cours (lorsqu'on montre qu'une loi géométrique est une loi sans mémoire).

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ P(X > k) = (1-p_1)^k.$$

On trouve alors (somme partielle de suite géométrique) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n}(1-p_1)^k = \frac{1}{p_1}(1-(1-p_1)^{n+1}).}$$

2. **Méthode 1 : en utilisant la deuxième expression de l'espérance**
Puisque Z est à valeur dans $\mathbb{N}$, on a (avec une valeur éventuellement infinie) :

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n)$$

Or le maximum de deux nombres est plus grand que n si et seulement si l'un des deux (au moins) est plus grand que n, ce qui s'écrit ici $(Z > n) = (X > n) \cup (Y > n)$.
L'union n'est pas disjointe. On utilise la formule de Grassman. Puisque X et Y sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} P(Z > n) &= P((X > n) \cup (Y > n)) \\ &= P(X > n) + P(Y > n)) - P((X > n) \cap (Y > n)) \\ &= P(X > n) + P(Y > n)) - P(X > n)P(Y > n) \\ &= (1 - p_1)^n + (1 - p_2)^n - (1 - p_1)^n (1 - p_2)^n \end{aligned}$$

On obtient (somme de 3 séries géométriques convergentes) :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - p_1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - p_1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((1 - p_1)(1 - p_2) \Big)^n \\ &= \frac{1}{1 - (1 - p_1)} + \frac{1}{1 - (1 - p_2)} + \frac{1}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)} \\ &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} < +\infty \end{aligned}$$

Méthode 2 : en utilisant revenant à la définition de l'espérance
Pour cela, on détermine la loi de Z. On a évidemment $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (Z = n) = \Big(X = n, Y < n \Big) \ \cup \Big(X < n, Y = n \Big) \Big(X = n, Y = n \Big).$$

Comme l'union est disjointe, par définition de probabilité, on a :

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(X = n, Y < n) + P(X < n, Y < n) + P(X = n, Y = n) \\ &= P(X = n)P(Y < n) + P(X < n)P(Y < n) + P(X = n)P(Y = n), \end{aligned}$$

la deuxième égalité étant vérifiée par indépendance de X et Y.

On a de plus : $P(Y < n) = 1 - P(Y \geq n) = 1 - P(Y > n - 1) = 1 - (1 - p_2)^{n-1}$.

Pour alléger les calculs, on note : $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$. On obtient :

$$P(Z = n) = p_1 q_1^{n-1}(1 - q_2^{n-1}) + p_2 q_2^{n-1}(1 - q_1^{n-1}) + p_1 p_2 (q_1 q_2)^{n-1} = p_1 q_1^{n-1} + p_2 q_2^{n-1} + (p_1 + p_2 - p_1 p_2)(q_1 q_2)^{n-1}.$$

Puisque $Z(\Omega) \in \mathbb{R}^+$, on effectue le calcul de l'espérance directement dans $[0, +\infty]$. Au passage, on reconnaît des espérances de lois géométriques.

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Z=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_1q_1^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} np_1q_1^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} np_1p_2(q_1q_2)^{n-1} \\
&= E(X)+E(Y)+p_1p_2\frac{1}{(1-q_1q_2)^2} = \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{p_1+p_2-p_1p_2}{(p_1+p_2-p_1p_2)^2} \\
&= \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_1+p_2-p_1p_2} \quad (ouf...)
\end{aligned}$$

Problème

Extrait de CCINP MP 2021 Maths 1

Partie I – Généralités sur la fonction zêta

1. Soit $a>1$ et $\varepsilon = \dfrac{1-a}{2}$. On a donc $a = 1+2\varepsilon$.

   Comme $\dfrac{\ln n}{n^a} = \dfrac{\ln n}{n^\varepsilon}\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ car, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^\varepsilon} = 0$, et comme la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ converge, par comparaison de séries à termes généraux positifs :

   $$\boxed{\text{Pour tout } a>1 \text{ la série } \sum \frac{\ln n}{n^a} \text{ converge.}}$$

2.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : x\mapsto \mathrm{e}^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$, et $f_n' : x \mapsto -\dfrac{\ln n}{n^x}$.
   - $\sum f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ comme série de Riemann convergente.
   - Soit $a>1$. Pour tout $x\geqslant a$, $|f_n'(x)| = \dfrac{\ln n}{n^x} \leqslant \dfrac{\ln n}{n^a}$.

     Donc $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{\ln n}{n^a}$ qui est un terme général de série convergente d'après la question précédente.

     Donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a,+\infty[$ avec $a>1$.

   Ainsi, par le théorème de dérivation terme à terme, ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[\subset]1,+\infty[$ donc elle l'est sur $]1,+\infty[$ et $\zeta' : x\mapsto -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x} \leqslant 0$ donc ζ décroît.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to1^+} f_n(x) = b_n = \dfrac{1}{n}$.

   Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]0,1[$, on pourrait appliquer le théorème de double limite dont l'une des conclusions serait : $\sum b_n = \sum \dfrac{1}{n}$ converge... **absurde !**
   Donc

   $$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]1,+\infty[.}$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = c_n$ avec $c_1 = 1$ et $c_n = 0$ si $n\geq 2$.

   Dans la question 2, par exemple avec $a=1$, on a vu que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[2,+\infty[$.

   Donc par le théorème de double limite : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1+\sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.}$

5. Soit $x > 1$. $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, ce qui permet de faire une comparaison série intégrale. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $\dfrac{1}{(k+1)^x} \leq \dfrac{1}{t^x} \leq \dfrac{1}{k}$. Et par positivité de l'intégrale :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}.$$

Si $N \in \mathbb{N}$, on ajoute ces encadrement pour $k = 1, \ldots, N$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x}$.

Et quand $N \to +\infty$ (les limites existent) :

$$\forall x > 1, \qquad \zeta(x) - 1 \leq I(x) \leq \zeta(x).$$

On a donc bien $\boxed{\forall x > 1,\ I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.}$

Or $I(x) = \left[\dfrac{1}{(-x+1)t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{x-1}$, donc $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \dfrac{1}{x-1} + 1$ et $1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant 1 + (x-1)$ donc $(x-1)\zeta(x) \longrightarrow x \to 11$ par encadrement et enfin $\boxed{\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}.}$

6. Il y a une imprécision dans l'énoncé : d_n désigne manifestement le nombre de diviseurs **positifs** de n. Comme tous les termes sont positifs, on peut manipuler les sommes (par paquets) et effectuer les calculs directement dans $[0, +\infty]$.

D'une part, on a :

$$\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{a=1}^{+\infty} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a^x} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{b^x} = \zeta^2(x) < +\infty$$

ce qui prouve déjà que la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b) \in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$.

D'autre part, on pose $A_n = \{(a,b) \in A,\ ab = n\}$.

Par exemple, $A_1 = \{(1,1)\}$, $A_2 = \{(1,2),(2,1)\}$, $A_3 = \{(1,3),(3,1)\}$, $A_4 = \{(1,4),(2,2),(4,1)\}$...

Alors $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = A$ et les A_n sont deux à deux disjoints. Ils forment donc une partition de A.

$$\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{n^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \mathrm{card}(A_n).$$

Or $\mathrm{card}(A_n) = \mathrm{card}\{(a,b) \in \mathbb{N}_*^2,\ n = ab\} = \mathrm{card}\left\{\left(a, \dfrac{n}{a}\right) \text{ avec } a \text{ diviseur positif de } n\right\} = d_n$.

Et donc $\displaystyle\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$. Avec la première égalité, on a bien : $\boxed{\displaystyle\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.}$

Partie II – Produit eulérien

7. On a de manière immédiate, $\dfrac{1}{\zeta(s)k^s} \geq 0$ et : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)k^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = 1$.

Donc il s'agit bien d'une loi de probabilité.

8. Comme $(X \in a\mathbb{N}^*) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = ak)$ (union disjointe), on a par σ-additivité,

$$P(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ak) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)a^s k^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)a^s}$$

donc $\boxed{P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}.}$

9. Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux deux à deux, et $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \dots, a_n)$ (avec $1 \leqslant r \leqslant n$), ils sont eux aussi deux à deux premiers entre eux donc on peut utiliser le résultat admis $(\star)$ et

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{r}(X \in b_k\mathbb{N}^*)\right) = P(b_1|X, \dots, b_r|X) \underset{(\star)}{=} P(b_1 \cdots b_r|X) = P(X \in b_1 \cdots b_r\mathbb{N}^*)$$

$$\underset{\mathbf{Q8}}{=} \frac{1}{(b_1 \cdots b_r)^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{b_k^s} \underset{\mathbf{Q8}}{=} \prod_{k=1}^{r} P(X \in b_k\mathbb{N}^*)$$

donc, par définition, $\boxed{\text{les } ([X \in a_k\mathbb{N}^*])_{k \in [\![1,n]\!]} \text{ sont mutuellement indépendants.}}$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$B_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)$ par définition de B_n. Or les $([X \notin p_k\mathbb{N}^*])_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants en tant que complémentaires des $([X \in p_k\mathbb{N}^*])_{1 \leqslant k \leqslant n}$ qui sont mutuellement indépendants d'après **Q19**.
Donc $\boxed{P(B_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(X \notin p_k\mathbb{N}^*) \underset{\mathbf{Q8}}{=} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).}$

11. Soit $\omega \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Alors $X(\omega)$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ divisible par aucun nombre premier : $\boxed{X(\omega) = 1,}$ et la réciproque est vraie. Donc $P\left(\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = P(X = 1) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$.
Or $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante,

$$P(B_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Vu la question précédente, on obtient bien $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \zeta(s).}$

12. On suppose par l'absurde que $\displaystyle\sum \frac{1}{p_k}$ converge. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ et $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{p_k}$ car $p_k \to +\infty$ (par exemple parce que $p_k \geqslant k$), par comparaison de séries à termes généraux positif, $\displaystyle\sum_k \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge, donc, par continuité de l'exponentielle, on a $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$.
Soit $s > 1$. On a pour $k \in \mathbb{N}^*$, $1 < p_k \leqslant p_k^s$ donc $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geqslant \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \geqslant 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, $\boxed{\forall s > 1,\ \ell \geqslant \zeta(s).}$
Mais $\zeta(s) \underset{s \to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ d'après **Q5** et on obtient une contradiction.
C'est donc que $\boxed{\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}}$