Devoir non surveillé 15

à rendre le mardi 21 janvier

Exercice 1

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

1. Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p_k$.
   Calculer l'espérance de $X - 1$ et de $(X - 1)(X - 2)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 respectivement. Soit $Z = \max\{X, Y\}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Z > k)$.
2. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Problème Partie 1 (Généralités sur la fonction zêta)

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

1. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.
2. Démontrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ puis qu'elle est décroissante.
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?
4. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
5. Soit $x > 1$. On pose :
$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$
   Démontrer que :
$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$
   En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.
6. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n.
   On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :
$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$
   On pourra considérer la réunion $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a, b) \in A,\ ab = n\}$.

Ce qui suit est facultatif

Problème Partie 2

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

7. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
8. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.

On admettra dans la suite que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux deux à deux et si $N \in \mathbb{N}^*$, alors on a :

$$(a_1|N, a_2|N, \dots, a_n|N) \iff a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n|N.$$

9. En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
   On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \dots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

11. Soit ω dans $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ converge.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

12. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geq \zeta(s)$.
    Conclure.