Devoir non surveillé 14 - Correction

Exercice 1

1. M compte le nombre de succès (« être un lapin mâle ») parmi $2n$ expériences aléatoires indépendantes. Donc $M \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$.

   Ainsi $\boxed{M(\Omega) = [\![0, 2n]\!] \text{ et pour tout } k \in [\![0, 2n]\!],\ \mathbb{P}(M = k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}.}$

2. Soit $\omega \in \Omega$ et $m = M(\omega)$.
   S'il y a m mâles, alors il y a $2n - m$ femelles. Et donc le nombre de couples possibles est $m(2n - m)$. Ainsi,

   $$\forall \omega \in \Omega, \qquad C(\omega) = M(\omega)(2n - M(\omega)).$$

   On a donc $\boxed{C = M(2n - M).}$

3. On a $C(\Omega) = \{k(2n - k),\ k \in [\![0, 2n]\!]\}$.
   Or la courbe représentative (à tracer) de $f : x \longmapsto x(2n - x)$ sur $[0, 2n]$ est une parabole tournée vers les $y < 0$ et dont le sommet est d'abscisse $x = n$.
   Par symétrie par rapport à $(D) : x = n$, on trouve que :

   $$\boxed{C(\Omega) = \{k(2n - k),\ k \in [\![0, n]\!]\} = \{0, (2n - 1), 2(2n - 2), \cdots, (n - 1)(n + 1), n^2\}.}$$

   - Pour $k = n$, on trouve : $\mathbb{P}(C = n^2) = \mathbb{P}(M = n) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$.
   - Pour $k \in [\![0, n - 1]\!]$, on trouve (k a deux antécédents par f) :

   $$\mathbb{P}(C = k(2n - k)) = \mathbb{P}(M = k) + \mathbb{P}(M = 2n - k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}} + \binom{2n}{2n - k}\frac{1}{2^{2n}} = 2\binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}.$$

4. Par linéarité de l'espérance (les supports sont finis ici), on a :

$$\mathbb{E}(C) = \mathbb{E}(M(2n - M)) = 2n\mathbb{E}(M) - \mathbb{E}(M^2) = 2n\mathbb{E}(M) - (\mathbb{V}(M) + \mathbb{E}(M)^2).$$

Et comme $M \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$, on a $\mathbb{E}(M) = 2n\frac{1}{2} = n$ et $\mathbb{V}(X) = 2n\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$.

On obtient $\boxed{\mathbb{E}(C) = 2n \times n - \left(\frac{n}{2} + n^2\right) = \frac{n(2n - 1)}{2}.}$

Exercice 2

1. On note A l'événement « *le premier tirage se fait dans l'urne* U_1 ».
   D'après la formule des probabilités totales avec le système d'événements $(A, \bar{A})$, on a :

   $$p_1 = P(B_1) = P_A(B_1)P(A) + P_{\bar{A}}(B_1)P(\bar{A}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

2. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(B_n, \bar{B_n})$.

$$p_{n+1} = P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\bar{B_n}}(B_{n+1})P(\bar{B_n}) = \frac{2}{5} \times p_n + \frac{4}{7} \times (1 - p_n).$$

On trouve bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.}$

3. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On cherche une suite constante ℓ vérifiant la relation de récurrence précédente.

$$\ell = -\frac{6}{35}\ell + \frac{4}{7} \iff \frac{41}{35}\ell = \frac{4}{7} \iff \ell = \frac{20}{41}.$$

On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7} &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} - \ell = -\frac{6}{35}(p_n - \ell) + \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (p_{n+1} - \ell) = -\frac{6}{35}(p_n - \ell) \qquad \text{(suite géométrique)} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n - \ell = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}(p_1 - \ell)
\end{aligned}$$

Or $p_1 - \ell = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{35 \times 41}$.

On obtient finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435}\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}.}$

Exercice 3

1. (a) Comme les tirages se font avec remise, ils sont indépendants les uns des autres. Si on considère l'événement « *tirer une boule blanche* » comme un succès, la variable aléatoire X représente le nombre de succès parmi cinq tirages indépendants, elle suit donc une loi binomiale de paramètres

$$(n, p) = \left(5, \frac{2}{10}\right) = \left(5, \frac{1}{5}\right)$$

puisque la probabilité d'avoir une boule blanche est $1/5$. On a donc :

$$X(\Omega) = [\![0, 5]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, 5]\!],\ P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}.$$

Et d'après le cours, $E(X) = np = 5 \times \frac{1}{5} = 1$ et $V(X) = np(1-p) = \frac{4}{5}$.

(b) D'après l'énoncé, on a $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$.
On a $Y(\Omega) = \{5k - 15, k \in [\![0, 5]\!]\} = \{-15, -10, -5, 0, 5, 10\}$.
Et pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$, on a

$$P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}.$$

Enfin, d'après le cours, on a $E(aX + b) = aE(X) + b$, donc $E(Y) = 5E(X) - 15 = -10$.
De même, $V(aX + b) = a^2V(X)$ donc $V(Y) = 25V(X) = 20$.

2. (a) Puisque les tirages se font sans remise, il revient au même de tirer 5 boules d'un coup. Cette fois, on peut tirer au plus 2 boules blanches donc

$$X(\Omega) = [\![0, 2]\!].$$

Il y a $\binom{10}{5}$ façons de tirer 5 boules parmi 10.
Pour $k \in [\![0, 2]\!]$, calculons le nombre de façons de tirer exactement k boules blanches.
Il y a $\binom{2}{k}$ façons de tirer k boules blanches parmi 2 et $\binom{8}{5-k}$ façons de tirer $5-k$ boules noires parmi 8, et donc $\binom{2}{k}\binom{8}{5-k}$ façons d'obtenir un tirage de 5 boules comportant k boules blanches. On obtient :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, 2]\!], \quad P(X = k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.}$$

$P(X = 0) = \frac{2}{9}$ n'intervient pas dans le calcul de $E(X)$ et $V(X)$.
Le calcul donne $P(X = 1) = \frac{5}{9}$ et $P(X = 2) = \frac{2}{9}$.
Ainsi $E(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) = 1$.
On a aussi $E(X^2) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 4P(X = 2) = \frac{13}{9}$. Et donc $V(X) = E(X^2) - E(X) = \frac{4}{9}$.

(b) Le raisonnement est identique à celui de la question 1(b).

$$\forall k \in [\![0, 2]\!], \quad P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

Et de même $E(Y) = 5E(X) - 15 = -10$ et $V(Y) = 25V(X) = \frac{100}{9}$.

Exercice 4

1. D'après l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}_{(Y=k)}(X = j) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \text{ si } j \in [\![0, k]\!] \\ \text{et} \\ 0 \text{ si } j \notin [\![0, k]\!] \end{cases}$$

Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y = k)_{k=0,\dots,n}$, on obtient pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = j) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\mathbb{P}_{(Y=k)}(X = j)}_{=0 \text{ si } j>k} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k+1} \mathbb{P}(Y = k).$$

2. Les supports de X et Y sont finis, donc $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ existent bien. Et le calcul donne (attention à l'échange des deux sommes) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{j=0}^{n} j\mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} j\frac{1}{k+1}\mathbb{P}(Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} j\frac{1}{k+1}\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\mathbb{P}(Y=k)\sum_{j=0}^{k} j \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\mathbb{P}(Y=k)\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Y=k)
\end{aligned}$$

On trouve $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{2}}$

Exercice 5

On a par positivité de l'intégrale $p_n \geq 0$.

On doit donc démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ si et seulement si $f(1) = 0$ et $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} = 1$.

• Si $f(1) \neq 0$: Par continuité de f en 1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\varepsilon, 1]$, on ait $f(t) \geq \frac{1}{2}$.
Et donc :

$$p_n = \int_0^{1-\varepsilon} t^n f(t)dt + \int_{1-\varepsilon}^1 t^n f(t)dt \geq \int_{1-\varepsilon}^1 t^n f(t)dt \geq \frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^1 t^n dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{1-\varepsilon}^1 = \frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{2(n+1)}.$$

Le minorant est le terme général d'une série divergente (équivalent à $\frac{1}{2(n+1)}$ quand n tend vers $+\infty$) donc par comparaison $\sum p_n$ diverge.

• Si $f(1) = 0$: On pose pour tout $t \in [0,1]$, $f_n(t) = t^n f(t)$.

Alors $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et a pour somme $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n f(t) = \frac{f(t)}{1-t}$.

Les fonctions f_n et S sont continues par morceaux sur $[0,1[$.

Hypothèse de domination : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1[$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} t^k f(t)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} t^n f(t) = \frac{f(t)}{1-t} = \varphi(t).$$

Et φ est continue sur $[0,1[$, prologeable par continuité en 1 car $f(1) = 0$ et f est dérivable en 1 :

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{1-t} = \frac{f(t)-f(1)}{1-t} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} f'(1).$$

Donc φ est intégrable sur $[0,1[$.

Le théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions s'applique. Ainsi, la série $\sum p_n = \sum \int_0^1 t^n f(t)dt$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n f(t)dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n f(t)dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt,$$

d'où le résultat attendu.