Devoir non surveillé 14

à rendre le mardi 14 janvier

Exercice 1 (❄)

On considère $2n$ lapins sélectionnés aléatoirement dans un enclos à lapins. La probabilité qu'un lapin soit mâle est $\frac{1}{2}$. On note M la variable aléatoire égale au nombre de lapins mâles obtenus et C la variable aléatoire égale au le nombre de couples possibles (un lapin mâle + un lapin femelle).

1. Donner la loi de M.
2. Donner une relation entre C et M.
3. Donner la loi de C.
4. Calculer l'espérance de C.

Exercice 2 (❄❄)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes.

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans son urne. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1, sinon il se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule obtenue au n-ième tirage est blanche ».
On pose aussi $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire la valeur de p_n.

Exercice 3 (❄❄)

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 4 (❉❉)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = k)$ est la loi uniforme sur $[\![0,\mathrm{k}]\!]$.

1. Déterminer la loi de (X, Y) puis la loi de X, en fonction de celle de Y.
2. Calculer l'espérance de X en fonction de celle de Y.

Exercice 5 (❉❉❉- *facultatif*)

Soit $f : [0, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction positive et dérivable en 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

Démontrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité si et seulement si $f(1) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} = 1$.