Devoir non surveillé 12 - Correction

Thème : Thème : Fonction zeta et fonction Gamma

E3A PSI 2002

un corrigé de Michel Staïner

Préliminaire

Question 0. La série de Riemann définissant $\zeta(x)$ converge si et seulement si $x > 1$, donc

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \zeta \text{ est }]1, +\infty[.}$$

Partie I

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x > 0 \ , \ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Question I.1.

I.1.1. Par concavité de la fonction ln, j'ai : $\forall t > 0 \ , \ \ln t \leq t - 1$, d'où, avec $t = 1 + \dfrac{x}{n}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \ , \ \forall x > 0 \ , \ u_n(x) \geq 0.}$$

I.1.2. Du développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0, je déduis, pour $x > 0$ fixé :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{d'où} \quad u_n(x) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2} \ ;$$

il en résulte, par comparaison à une série de Riemann, que la série numérique $\sum u_n(x)$ converge, cela pour tout $x > 0$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } u_n \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[.}$$

Dans toute la suite du problème, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

Question I.2.

I.2.1. Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $[a, b]$, avec

$$\forall x \in [a, b] \ , \ u_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \quad \text{d'où} \quad |u_n'(x)| = \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{b}{n^2}.$$

Or, la série numérique $\sum \frac{b}{n^2}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $[a,b]$; *a fortiori*, elle converge uniformément sur tout segment de $[a,b]$; comme je viens de voir que $\sum u_n$ converge simplement sur $[a,b]$, je peux appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions : S est dérivable sur $[a,b]$ (et $S' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$). En particulier

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } [a,b].}$$

I.2.2. Le résultat précédent est établi pour tout couple (a,b) tel que $0 < a < b$; par conséquent :

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x > 0\ ,\ \frac{dS}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).}$$

Question I.3.

Par définition des u_n, j'ai :

$$\sum_{n=1}^{p} u_n(1) = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p}\big(\ln(n+1) - \ln n\big) = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln(p+1)$$

d'où, puisque $\gamma = S(1)$,

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p - \gamma = \sum_{n=1}^{p} u_n(1) + \ln(p+1) - \ln p - S(1) = \sum_{n=1}^{p} u_n(1) - S(1) + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, puisque $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$. Autrement dit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} = \ln p + \gamma + \underset{p\to+\infty}{o}(1).}$$

Question I.4.

I.4.1. Fixons $p \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$; j'ai

$$\begin{aligned}\forall n \in [\![1,p]\!]\ ,\ u_n(x+1) - u_n(x) &= \frac{x+1}{n} - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) - \frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln(n+x+1) + \ln(n+x)\end{aligned}$$

En sommant, il reste après l'hécatombe :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{p}\big(u_n(x+1) - u_n(x)\big) = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).}$$

I.4.2. Soit $x > 0$ fixé ; j'ai pour $p \in \mathbf{N}^*$, d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} u_n(x+1) - \sum_{n=1}^{p} u_n(x) &= \ln p + \gamma + \underset{p\to+\infty}{o}(1) + \ln(1+x) - \ln(p+1+x) \\ &= \gamma + \ln(1+x) - \ln\left(1 + \frac{1+x}{p}\right) + \underset{p\to+\infty}{o}(1),\end{aligned}$$

d'où, par unicité de la limite lorsque p tend vers l'infini : $S(x+1) - S(x) = \gamma + \ln(1+x)$, autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).}$$

Question 5.

Soit φ la fonction définie de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x > 0\ ,\ \varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma x + S(x)}}{x}.$$

I.5.1. Soit $x > 0$; d'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) &= \frac{1}{x+1}\exp\big(-\gamma(x+1) + S(x+1)\big)\\
&= \frac{1}{x+1}\exp\big(-\gamma(x+1) + S(x) + \gamma + \ln(x+1)\big)\\
&= \frac{1}{x+1}\exp\big(-\gamma x + S(x)\big)\exp\big(\ln(x+1)\big)\\
&= \exp\big(-\gamma x + S(x)\big)\,,
\end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \varphi(x+1) = x\,\varphi(x).}$$

I.5.2. Nous avons vu que S était dérivable sur $]0, +\infty[$, donc, exp étant dérivable sur $\mathbf{R}$, en vertu des théorèmes opératoires classiques :

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

J'applique les formules de dérivation d'un produit et d'une fonction composée :

$$\forall x > 0\ ,\ \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}\exp\big(-\gamma x + S(x)\big) + \frac{1}{x}\big(-\gamma + S'(x)\big)\exp\big(-\gamma x + S(x)\big)\,,$$

soit

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x} - \gamma + S'(x)\right)\cdot\varphi(x).}$$

Comme $S(1) = \gamma$, j'ai $\varphi(1) = 1$; de plus, d'après **2.2.**,

$$S'(1) = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = 1,$$

d'où finalement :

$$\boxed{\varphi'(1) = -\gamma.}$$

Question I.6.

Soient $n \geq 1$ et $x > 0$, j'ai par définition de φ_n :

$$\begin{aligned}
\ln\varphi_n(x) &= x\ln n + \sum_{k=1}^{n}\ln k - \ln x - \sum_{k=1}^{n}\ln(x+k)\\
&= x\ln n - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \ln x\\
&= x\ln n + \sum_{k=1}^{n}u_n(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n} - \ln x\\
&= \sum_{k=1}^{n}u_n(x) - x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) - \ln x
\end{aligned}$$

D'où, par définition de S et grâce au **3.**,

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \ln\big(\varphi_n(x)\big) \text{ tend vers } S(x) - x\gamma - \ln x \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

Question I.7.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi_p = \displaystyle\prod_{n=1}^{p} \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{1 + \frac{x}{n}} \right)$.

I.7.1. Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$; π_p est dans $\mathbf{R}^{+*}$ et

$$\ln \pi_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{x}{n} - \sum_{n=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{p} u_n(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x).$$

D'où, par continuité de la fonction exp :

$$\boxed{\text{La suite } (\pi_p)_{p\geq 1} \text{ converge vers } L(x) = \exp S(x).}$$

I.7.2. Alors, par définition même de φ :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \varphi(x) = \frac{L(x)}{x} \exp(-x\gamma).}$$

Partie II

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt.$

Question II.1.

II.1.1. Pour x réel, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs strictement positives et

$$f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{et} \quad t^2 f_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad f_x(t) \underset{t\to+\infty}{O} \left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par conséquent, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1-x < 1$ (c'est-à-dire $x > 0$) et f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x. Par conséquent :

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \Gamma \text{ est }]0, +\infty[.}$$

II.1.2. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{T\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=T} = \lim_{T\to+\infty} (1 - e^{-T}) = 1$:

$$\boxed{\Gamma(1) = 1.}$$

II.1.3. Soient $x > 0$ et a, b tels que $0 < a < b$; j'intègre par parties sur le segment $[a, b]$:

$$x \int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt = \left[t^x e^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b t^x e^{-t}dt.$$

Comme $x > 0$, j'obtiens, à la limite pour $a \to 0$ et $b \to +\infty$: $x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$, soit :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x).}$$

Question II.2.

Pour n entier naturel ≥ 1, on définit la fonction g_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$t \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq t < n, \\ \\ 0 & \text{si} \quad t \geq n \end{cases}$$

II.2.1. Par concavité de la fonction exp, j'ai : $\forall x \in \mathbf{R}\ ,\ \exp x \geq 1 + x$; d' où, avec $x = -t$:

$$\boxed{\forall t \geq 0\ ,\ \exp(-t) \geq 1 - t.}$$

Soient alors $t \geq 0$ et $n \geq 1$; si $t \geq n$, $g_n(t) = 0$ et j'ai bien $0 \leq g_n(t) \leq \exp(-t)$; je suppose maintenant $0 \leq t < n$, je peux appliquer le résultat ci-dessus à t/n et j'utilise la croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}^+$:

$$0 \leq 1 - \frac{t}{n} \leq \exp\left(-\frac{t}{n}\right) \quad \text{d'où} \quad 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \exp(-t).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \geq 0\ ,\ \forall n \geq 1\ ,\ 0 \leq g_n(t) \leq \exp(-t).}$$

II.2.2. Soit $x > 0$ fixé ; $f_n : t \mapsto t^{x-1} g_n(t)$ est nulle sur $[n, +\infty[$, continue sur $]0, n]$, avec $f_n(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$, donc, par comparaison à une intégrale de Riemann $(1 - x < 1)$, f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, avec :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

J'applique alors le théorème de convergence dominée à la suite de fonction (f_n), sur l'intervalle $]0, +\infty[$: les f_n sont continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $f : t \mapsto t^{x-1} \exp(-t)$; en effet, pour $t > 0$ fixé, j'ai $t < n$ pour n assez grand (précisément pour $n > t$!) et

$$\forall n > t\ ,\ f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp(-t) t^{x-1}$$

car

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -t$$

f est continue sur $]0, +\infty[$, il ne reste qu'à vérifier l'hypothèse de domination. Or, d'après la question précédente, j'ai

$$\forall t > 0\ ,\ \forall n \geq 1\ ,\ |f_n(t)| \leq f(t),$$

qui ne dépend pas de n et enfin, d'après le **1.1.**, f est intégrable sur $]0, +\infty[$; le théorème de convergence dominée me permet alors de conclure que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\infty} f(t) dt,$$

autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).}$$

Question 3.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la fonction I_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1 - t)^n t^{x-1} dt.$$

II.3.1. Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto (1-t)^n t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$, à valeurs positives, équivalente à $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ au voisinage de 0, donc intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x > 0$.

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } I_n \text{ est }]0,+\infty[.}$$

II.3.2. Soient $x > 0$ et $\varepsilon \in]0,1[$; j'effectue le changement de variable $u = t/n$ sur le segment $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_\varepsilon^1 (1-u)^n u^{x-1} du = \int_{n\varepsilon}^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^{x-1}}{n^{x-1}} \cdot \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n^x} \int_{n\varepsilon}^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

A la limite pour ε tendant vers 0, j'obtiens :

$$\boxed{\forall x > 0 \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x I_n(x).}$$

II.3.3. De même, pour $x > 0$ et $n \geq 2$, j'intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_\varepsilon^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \left[(1-t)^n \frac{t^x}{x}\right]_{t=\varepsilon}^{t=1} + \frac{n}{x} \int_\varepsilon^1 (1-t)^{n-1} t^x dt$$

Pour ε tendant vers 0, comme $x > 0$, j'obtiens

$$\boxed{I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1).}$$

Par une récurrence immédiate, il vient, compte tenu du fait que la relation ci-dessus reste correcte pour $n = 1$ (en étendant la définition de I_n à I_0) :

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

et donc, d'après **3.2.** :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \varphi_n(x).$$

Dans la partie **1.**, on a déterminé la limite de $\big(\ln \varphi_n(x)\big)$, qui donne, par continuité de la fonction exp, $\varphi_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ finalement, grâce au **2.2.**, par unicité de la limite :

$$\boxed{\forall x > 0 \ , \ \Gamma(x) = \varphi(x).}$$

Partie III

Dans toute cette partie, $x \in]0,1[$. On rappelle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$.

Question III.1.

La fonction $h : t \mapsto \exp(-t) \ln^2 t$ est continue sur $]0,+\infty[$, à valeurs positives et, d'après les croissances comparées des fonctions usuelles, j'ai

$$h(t) = \underset{t \to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad h(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, h est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t \, dt \text{ existe.}}$$

Question III.2.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit les fonctions :

v_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall t > 0\ ,\ v_n(t) = \dfrac{x^n}{n!}\ln^n(t)\ \mathrm{e}^{-t}$

et T_n de $]1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall u > 1\ ,\ T_n(u) = \displaystyle\int_{1/u}^{u} v_n(t)dt$.

III.2.1. Soit $u > 1$ fixé. J'ai, pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \left[u, \dfrac{1}{u}\right]$, $|\ln t| \leq \ln u$ et $e^{-t} \leq 1$, d'où

$$\sup_{\left[u,\frac{1}{u}\right]} |v_n| \leq \frac{x^n(\ln u)^n}{n!}\ ;$$

or la série numérique (x et u étant fixés) $\sum \dfrac{(x\ln u)^n}{n!}$ converge (série exponentielle, de somme $\exp(x\ln u)$). Par conséquent :

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } v_n \text{ converge normalement sur } \left[\frac{1}{u}, u\right].}$$

III.2.2. *A fortiori*, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $\left[u, \dfrac{1}{u}\right]$, d'où, grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\boxed{\forall u > 1\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^{u}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\right)dt.}$$

Question III.3.

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}\int_0^1 |\ln^n(t)|\ \mathrm{e}^{-t}dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{x^n}{n!}\int_1^{+\infty} \ln^n(t)\ \mathrm{e}^{-t}dt.$$

III.3.1. Pour tout n de $\mathbf{N}$, l'existence de a_n et b_n se justifie comme celle de l'intégrale du **1.**, et

$$a_n + b_n = \frac{x^n}{n!}\int_0^{+\infty} \exp(-t)|\ln t|^n dt$$

d'où, par linéarité de l'intégrale, pour $p \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^{p}(a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t)\sum_{n=0}^{p}\frac{(x|\ln t|)^n}{n!}dt.$$

Or, pour tout $t > 0$, x étant fixé, la série numérique de terme général $\dfrac{(x|\ln t|)^n}{n!}$ est convergente, de somme $\exp(x|\ln t|)$; comme elle est à termes positifs, ses sommes partielles sont majorées par sa somme, d'où

$$\forall t > 0 \quad \exp(-t)\sum_{n=0}^{p}\frac{(x|\ln t|)^n}{n!} \leq \exp(-t)\exp(x|\ln t|) = \exp(-t + x|\ln t|).$$

Pour $t \in]0, 1]$, $\exp(-t + x|\ln t|) = \exp(-t - x\ln t) = \dfrac{\exp(-t)}{t^x} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et,

pour $t \geq 1$, $\exp(-t + x|\ln t|) = \exp(-t + x\ln t) = t^x \exp(-t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
J'en déduis, par comparaison aux intégrales de Riemann, que la fonction $t \mapsto \exp(-t + x|\ln t|)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où finalement, par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\forall p \geq 0\ ,\ \sum_{n=0}^{p}(a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t + x|\ln t|)dt}$$

III.3.2. J'ai, pour tout $u > 1$, $|T_n(u)| \leq a_n + b_n$, d'où $\sup\limits_{]1,+\infty[} |T_n| \leq a_n + b_n$. Or je viens de voir que la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général $a_n + b_n$ est majorée. Comme cette série est à termes positifs, il en résulte qu'elle converge et, par conséquent :

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } T_n \text{ converge normalement sur }]1, +\infty[.}$$

Question III.4.

III.4.1. Par définition, $\Gamma(1 + x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \exp(-t)dt$, où, pour tout $t > 0$: $t^x = \exp(x \ln t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln t)^n}{n!}$.
Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[\ ,\ \Gamma(1 + x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \exp(-t)(\ln t)^n\right) dt.}$$

III.4.2. Autrement dit, d'après **2.2.**, $\Gamma(1 + x) = \lim\limits_{u\to+\infty} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)$. Or, je viens de voir que la série de fonctions $\sum T_n$ converge uniformément sur $]1, +\infty[$; comme par ailleurs, pour tout n, $T_n(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} v_n(t)dt$ (car v_n est intégrable sur $]0, +\infty[$), le théorème de la double limite s'applique : la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} v_n(t)dt$ converge et

$$\lim_{u\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{u\to+\infty} T_n(u).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[\ ,\ \Gamma(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t)(\ln t)^n dt\right).}$$

Question III.5.

III.5.1. D'après les questions **2.2.** et **5.2.** de la partie **1**, j'ai

$$\varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + x}\right)\right) \cdot \varphi(x),$$

soit, puisque $\varphi = \Gamma$ d'après la dernière question de la partie **2** :

$$\boxed{\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + x}\right).}$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, puisque j'ai $x \in]0, 1[$, j'ai $\left|-\frac{x}{n}\right| < 1$ et je connais la série géométrique de raison $-\frac{x}{n}$:

$$\frac{1}{n + x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{n}\right)^k$$

d'où

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{n^{k+1}},$$

soit, d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right).}$$

III.5.2. L'énoncé m'autorise à admettre que

$$\forall x \in]0,1[\ , \ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \right),$$

soit, en réindexant et en changeant le nom de la variable :

$$\forall t \in]0,1[\ , \ \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = -\frac{1}{t} - \gamma + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k t^{k-1} \zeta(k).$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$; en intégrant sur le segment $[\varepsilon, x]$, j'obtiens, sachant que Γ est à valeurs strictement positives :

$$[\ln \Gamma(t)]_{t=\varepsilon}^{t=x} = -\ln x + \ln \varepsilon - \gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k).$$

L'intégration terme à terme de la série est justifiée, du fait qu'il s'agit de la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1 — car $\left| (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} \right| \leq \frac{\zeta(2)}{2}$ pour tout $k \geq 2$ — et que l'on intègre sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière, où elle converge normalement. J'ai donc :

$$\ln \big(x\Gamma(x) \big) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) + \ln \big(\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \big),$$

cela pour tout ε de $]0,1[$; or $\varepsilon\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1+\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1$, puisque $\Gamma = \varphi$ est continue en 1 (on a vu dans la partie **1** qu'elle était dérivable sur $]0,+\infty[$). A la limite, lorsque ε tend vers 0, j'obtiens donc

$$\ln \Gamma(1+x) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k),$$

soit, en appliquant la fonction exp :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\ , \ \Gamma(1+x) = \exp \left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) \right).}$$

III.5.3. La formule de Taylor, appliquée à la somme de la série entière évoquée ci-dessus, me donne

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) = \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

d'où

$$\Gamma(1+x) = \exp \left(-\gamma x + \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2) \right) = 1 - \gamma x + \frac{\gamma^2 + \zeta(2)}{2} x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

Par ailleurs, j'ai vu au **4.2.** que

$$\forall x \in \,]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ \lambda_n = \int_0^{+\infty} \exp(-t) \frac{(\ln t)^n}{n!} dt.$$

Ainsi, la série entière $\sum \lambda_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, sa fonction somme admet en 0 le développement limité $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + o(x^2)$. D'où, par unicité de ce développement limité :

$$\lambda_0 = 1\ ,\ \lambda_1 = -\gamma\ ,\ \lambda_2 = \frac{\gamma^2 + \zeta(2)}{2}.$$

En particulier, sachant que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t \, dt = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.}$$