Devoir non surveillé 12

Thème : Fonction zeta et fonction Gamma

à rendre le vendredi 13 décembre

Question préliminaire

Question 0. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On admettra dans tout le problème que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème Partie 1

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x > 0 \ , \ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Question I.1.

I.1.1. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}^* \ , \ \forall x > 0 \ , \ u_n(x) \geq 0$.

I.1.2. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

Question I.2.

I.2.1. Soient a, b des réels tels que $0 < a < b$. Prouver que S est dérivable sur $[a, b]$.

I.2.2. En déduire que S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \ , \ \frac{dS}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

Question I.3.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que lorsque p tend vers l'infini : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ln(p) + \gamma + \underset{p \to +\infty}{o}(1)$.

Question I.4.

I.4.1. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{p} \big(u_n(x+1) - u_n(x)\big) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

I.4.2. En déduire que :

$$\forall x > 0 \ , \ S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).$$

Question 5.

Soit φ la fonction définie de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma x + S(x)}}{x}.$$

I.5.1. Montrer que $\forall x > 0 \ , \ \varphi(x+1) = x\,\varphi(x)$.

I.5.2. Vérifier que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Calculer $\dfrac{d\varphi}{dx}(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\dfrac{d\varphi}{dx}(1)$?

Question I.6.

Pour $n \geq 1$, soit φ_n la fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Montrer que $\forall x > 0 \ , \ \ln\big(\varphi_n(x)\big)$ tend vers $S(x) - x\gamma - \ln x$ quand n tend vers $+\infty$.

Question I.7.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi_p = \displaystyle\prod_{n=1}^{p} \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{1 + \frac{x}{n}} \right)$.

I.7.1. Prouver la convergence de la suite $(\pi_p)_{p \geq 1}$ vers une limite $L(x)$.

I.7.2. En déduire que : $\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \dfrac{L(x)}{x}\mathrm{e}^{-x\gamma}$.

Ce qui suit est facultatif (peut être rendu à la rentrée)

Problème Partie 2

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$.

Question II.1.

II.1.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

II.1.2. Calculer $\Gamma(1)$.

II.1.3. Montrer que $\forall x > 0 \ , \ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Question II.2.

Pour n entier naturel ≥ 1, on définit la fonction g_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$t \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq t < n, \\[2ex] 0 & \text{si} \quad t \geq n \end{cases}$$

II.2.1. Prouver que : $\forall t \geq 0 \ , \ \mathrm{e}^{-t} \geq 1 - t$.
En déduire que : $\forall t \geq 0 \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ 0 \leq g_n(t) \leq \mathrm{e}^{-t}$.

II.2.2. Montrer alors que :

$$\forall x > 0 \ , \ \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

Question II.3.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la fonction I_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt.$$

II.3.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n.

II.3.2. Prouver que :

$$\forall x > 0 \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x I_n(x).$$

II.3.3. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$ et en déduire que :

$$\forall x > 0 \ , \ \Gamma(x) = \varphi(x).$$

Problème Partie 3

Dans toute cette partie, $x \in]0,1[$. On rappelle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$.

Question III.1.

Vérifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln^2(t) \ \mathrm{e}^{-t} \, dt$.

Question III.2.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit les fonctions :

v_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall t > 0 \ , \ v_n(t) = \dfrac{x^n}{n!} \ln^n(t) \ \mathrm{e}^{-t}$

et T_n de $]1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall u > 1 \ , \ T_n(u) = \displaystyle\int_{1/u}^u v_n(t) dt$.

2.1. Pour $u > 1$ donné, montrer que la série de fonctions de terme général v_n converge normalement sur $\left[\dfrac{1}{u}, u\right]$.

2.2. Justifier que : $\forall u > 1 \ , \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^u \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\right) dt$.

Question III.3.

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \int_0^1 |\ln^n(t)| \ \mathrm{e}^{-t} dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{x^n}{n!} \int_1^{+\infty} \ln^n(t) \ \mathrm{e}^{-t} dt.$$

III.3.1. Montrer que : $\forall p \geq 0 \ , \ \displaystyle\sum_{n=0}^{p} (a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t + x|\ln t|) dt$.

III.3.2. En déduire que la série de fonctions de terme général T_n converge normalement sur $]1, +\infty[$.

Question III.4.

III.4.1. Vérifier que $\forall x \in]0,1[\ , \ \Gamma(1+x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \ln^n(t) \ \mathrm{e}^{-t}\right) dt$.

III.4.2. Prouver alors que :

$$\forall x \in \left]0,1\right[\ , \ \Gamma(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\int_0^{+\infty}\ln^n(t)\ \mathrm{e}^{-t}dt\right).$$

Question III.5.

III.5.1. A l'aide des parties 1 et 2, vérifier que :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

puis que $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}x^k\right)$.

III.5.2. En admettant que l'on peut intervertir dans la formule précédente les deux sommations, prouver que :

$$\forall x \in \left]0,1\right[\ , \ \Gamma(1+x)=\exp\left(-\gamma x+\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k)\right).$$

III.5.3. Démontrer alors le résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln^2(t)\ \mathrm{e}^{-t}\,dt=\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}$.