Devoir non surveillé 11 - Correction

Exercice 1

E3A PSI 2020 ex1

À partir d'un corrigé de B. Winckler

1. Montrons que pour tout $x \in [1,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ converge.

   Soit $x \in [1,+\infty[$. Comme $f_n(x) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ est manifestement alternée. Or la suite $\left(\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car $n \mapsto 1+nx$ et la fonction racine carrée sont croissantes, et elle converge vers 0. Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ converge.

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement sur } J = [1,+\infty[.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|f_n| : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ décroît sur $[1,+\infty[$, est égale à $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ en 1 et tend vers 0 en l'infini. Par conséquent (on pourra éventuellement représenter son tableau de variation) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

   Or : $\frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ($\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$). Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ diverge.

$$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } J = [1,+\infty[.}$$

3. On a démontré dans la première question que pour tout $x \in [1,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ vérifie le théorème spécial des séries alternées. Par conséquent son reste d'indice N (noté $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$) est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1,+\infty[, \quad |R_N(x)| \leqslant |f_{N+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(N+1)x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2+N}}.$$

   Cette majoration est indépendante de x. Donc, par définition de la borne supérieure (plus petit des majorants) :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|R_N\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2+N}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_\infty = 0$. Ainsi le reste de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ vers la fonction nulle, ce qui équivaut au fait que

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformément sur } J = [1,+\infty[.}$$

4. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$, et on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{si } n=0,\\ 0 & \text{si } n\geqslant 1,\end{cases}$$

donc, d'après le théorème de la double limite :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}0=1.}$$

5. 5.1. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie clairement les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, que nous avons rappelées dans la première question ; donc elle converge.

5.2. La série de Riemann $\sum\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $\alpha=\frac{3}{2}>1$.

5.3. Soit $x\in J$. On a (on remarque que 1 est le terme de la série obtenu avec $n=0$) :

$$\varphi(x)-\left(1+\frac{a}{\sqrt{x}}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}}-\frac{1}{\sqrt{nx}}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{nx}-\sqrt{1+nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x)-\left(1+\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}\left(\sqrt{nx}+\sqrt{1+nx}\right)}\right|\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}\left(\sqrt{nx}+\sqrt{1+nx}\right)} \qquad \text{(inégalité triangulaire\ldots}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{\ldots sous réserve de convergence)}\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}\left(\sqrt{nx}+\sqrt{nx}\right)}\\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}},\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\forall x\in J,\quad \left|\varphi(x)-\left(\ell+\frac{A}{\sqrt{x}}\right)\right|\leq\frac{B}{2x\sqrt{x}}.}$

5.4. En posant $M=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, nous avons l'existence d'une constante réelle $M>0$ telle que pour tout x au voisinage de l'infini, on ait :

$$\left|\varphi(x)-\left(1+\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right|\leqslant\frac{M}{x\sqrt{x}}.$$

Ceci montre bien que : $\varphi(x)-\left(1+\frac{a}{\sqrt{x}}\right)=\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\varphi(x)=1+\frac{a}{\sqrt{x}}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).}$$

Exercice 2

E3A PSI 2022 ex2

à partir d'un corrigé de P.Ducrot

1. Si $q=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k = r+1$. Sinon, $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k = \frac{1-q^{r+1}}{1-q}$.
2. $X^p - 1 = (X-1)(X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots+1)$. Donc X^p-1 est divisible par $(X-1)$ (le reste vaut 0) et le quotient est :
$$\boxed{Q(X) = X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots+1.}$$
3. Pour tout $P \in E_n$, l'application $x \to \displaystyle\int_1^x P(t)\mathrm{d}t$ est une application polynômiale, de degré au plus $n+1$, et qui s'annule en 1. Le polynôme associé est donc dans E_{n+1}, et admet 1 comme racine : il est divisible par $X-1$, et le quotient est un polynôme de E_n.
$$\boxed{\text{Il existe } Q \in E \text{ tel que pour tout } x \neq 1, \text{ on a : } Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t.}$$
4. D'après la question précédente, l'image de f est incluse dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, et f est linéaire par linéarité de l'intégrale.
$$\boxed{f \in \mathcal{L}(E).}$$
5. Soit $Q \in E$.
Si P est un élément de E tel que $Q = f(P)$, alors, pour tout réel $x \neq 1$, on a $(x-1)Q(x) = \displaystyle\int_1^x P(t)\mathrm{d}t$. Cette égalité est également vraie en $x=1$. Donc en dérivant (justifier que c'est possible à l'aide du théorème fondamental de l'analyse) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = Q(x) + (x-1)Q'(x).$$
Ainsi, le seul antécédant possible de Q par f est le polynôme $P(X) = Q(X) + (X-1)Q'(X)$.
On vérifie que, pour ce polynôme P, on a bien $f(P) = Q$:
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{x-1}\int_1^x (Q(t)+(t-1)Q'(t))\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-1}\Big[(t-1)Q(t)\Big]_1^x = \frac{1}{x-1}\Big((x-1)Q(x) - 0\Big) = Q(x).\end{aligned}$$
On a donc bien $f(P) = Q$.
Ainsi, l'application f est inversible. C'est un automorphisme de E_n dont l'automorphisme réciproque est
$$\boxed{f^{-1} \ : \ Q \in E_n \mapsto Q + (X-1)Q'.}$$
6. D'après la question 2, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = \dfrac{1}{k+1}(1+X+\cdots+X^k)$, donc :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

$f^{-1}(1) = 1$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f^{-1}(X^k) = -kX^{k-1} + (k+1)X^k$. Donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

7. Les matrices A et A^{-1} sont triangulaires. La liste de leurs valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité, coïncide avec la liste de leurs éléments diagonaux. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{\frac{1}{k},\ k = 1 \dots n+1\right\} \text{ et } \mathrm{Sp}(A^{-1}) = [\![1, n+1]\!].$$

8. A et A^{-1} admettent chacune $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Elles sont diagonalisables.
9. Cas de la racine 1 : Q s'écrit $Q = (X-1)^k\widetilde{Q}$, où $\widetilde{Q}(1)ne0$.
   Ainsi $f^{-1}(Q) = Q + (X-1)Q' = (X-1)^k[(k+1)\widetilde{Q} + (X-1)\widetilde{Q}']$, et, puisque $[(k+1)\widetilde{Q} + (X-1)\widetilde{Q}'](1) \neq 0$, 1 est encore racine de $f^{-1}(Q)$ d'ordre de multiplicité k.
   On suppose maintenant que $\alpha \neq 1$. Q s'écrit $Q = (X-\alpha)^k\widetilde{Q}$, où $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$, et

$$f^{-1}(Q) = Q + (X-1)Q' = (X-\alpha)^{k-1}[k(X-1)\widetilde{Q} + (X-\alpha)(\widetilde{Q} + (X-1)\widetilde{Q}')].$$

   Si α est racine simple de Q, α n'est plus racine de $f^{-1}(Q)$.
   Par contre, si $k \geq 2$, α est racine de $f^{-1}(Q)$ d'odm $k-1$.
10. Soit $p \in [\![1, n+1]\!]$ et Q un vecteur propre de f^{-1} associé à la valeur propre p. Q n'est pas le polynôme nul et $f^{-1}(Q) = pQ$. Ainsi $f^{-1}(Q)$ et Q ont les mêmes racines, au même odm. D'après l'étude précédente, cela prouve que la seule racine possible de Q dans (C) est 1 : $Q = A(X-1)^k$, où A est un réel arbitraire et k un entier.
    Alors $f^{-1}(Q) = A(k+1)(X-1)^k = (k+1)Q$, et $k+1 = p$, soit $k = p-1$.
    Finalement, $\ker(f^{-1} - p\mathrm{Id}_{E_n}) = \mathbb{R}.(X-1)^{p-1}$.
11. Pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$, la relation $f^{-1}(Q) = pQ$ équivaut à la relation $f(Q) = \dfrac{1}{p}Q$. Donc les sous-espaces propres de f sont ceux de f^{-1}.

Exercice 3

Oral ENSEA PSI 2019, Centrale PC 2022

Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de M est scindé, donc M est trigonalisable. Ainsi, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}MP = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Et pour tout $k \in \mathbb{N}$, T^k est de la forme $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Or M^k et T^k sont semblables (car $T^k = (P^{-1}MP)^k = (P^{-1}M\underbrace{P)(P^{-1}}_{=I_n}MP)\cdots(P^{-1}MP) = P^{-1}M^kP$) donc elles ont même trace.
Ainsi, pour tout entier naturel k, on $\mathrm{tr}(M^k) = \mathrm{tr}(T^k) = \lambda_1^k + \cdots \lambda_n^k$.

(Raisonnement et résultat ci-dessus à retenir)

Dans le raisonnement précédent, les λ_i ne sont pas nécessairement distincts. On modifie donc les notations. Désormais, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les valeurs propres distinctes de M, et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives.

Le résultat précédent s'écrit : $\mathrm{tr}(M^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i \alpha_i^p$.

- Si 1 est la seule valeur propre de M, alors $p = 1$, $\alpha_1 = 1$ et $m_1 = n$. Et donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}(M^k) = n \times 1 = n$.
- Réciproquement, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(M^k) = n$. C'est vrai aussi pour $k = 0$. Et d'après ce qui précède :

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad \sum_{i=1}^{p} m_i \alpha_i^k = n.$$

Cette égalité s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \text{ est solution de } \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \cdots & \alpha_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

Mais on a aussi $\forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i \alpha_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{p} (m_i \alpha_i) \alpha_i^k = n.$

Et donc $\begin{pmatrix} \alpha_1 m_1 \\ \alpha_2 m_2 \\ \vdots \\ \alpha_p m_p \end{pmatrix}$ est aussi solution du système précédent.

Or ce système est inversible car son déterminant $\Delta = V(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est un déterminant de Vandermonde non nul (puisque $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ distincts). Ainsi le sytème possède un unique solution :

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 m_1 \\ \alpha_2 m_2 \\ \vdots \\ \alpha_p m_p \end{pmatrix}.$$

Comme les m_i sont des entiers naturels non nuls, on obtient $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_i = 1$, ce qui n'est possible que si $p = 1$. Finalement 1 est la seule valeur propre de M.

$$\boxed{\text{1 est la seule valeur propre de } M \text{ si et seulement si, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}(M^k) = n.}$$

Exercice 4

Oral Mines-Ponts PSI 2023

1. Par récurrence, on montre que $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$.

- pour $n=0$, $p_0(x) = 0 \leq \sqrt{x}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$.

Alors $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - p_n^2(x)\right) \geq p_n(x) \geq 0$.

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1}(x) & = & p_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - p_n^2(x)\right) \ = \ p_n(x) + \dfrac{1}{2}\underbrace{\left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)}_{\geq 0}\left(\sqrt{x} + \underbrace{p_n(x)}_{\leq\sqrt{x}}\right) \\ & \leq & p_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)\left(2\sqrt{x}\right) \ = \ x + \underbrace{p_n(x)}_{\leq\sqrt{x}}\underbrace{(1-\sqrt{x})}_{\geq 0} \\ & \leq & x + \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) \ = \ \sqrt{x} \end{array}$$

Par le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$.

Et donc $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - p_n^2(x)\right) \geq p_n(x)$ ce qu'on voulait.

2. Si $x \in [0,1]$ est fixé, la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc convergente. On note $p(x)$ sa limite.
En passant dans l'égalité, on trouve $p(x) = p(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - p^2(x)\right)$, et comme $p(x) \geq 0$, on a $p(x) = \sqrt{x}$.

$$\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} p_n(x) = \sqrt{x} = p(x).$$

C'est la définition de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $p = \sqrt{\ }$ sur $[0,1]$.

3. On note $f_n(x) = p(x) - p_n(x) = \sqrt{x} - p_n(x)$. Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions positives qui converge simplement vers 0.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, c'est forcément vers sa limite simple 0.
On utilise le fait que $\sqrt{x} \ = \ \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\left(x - \sqrt{x}^2\right)$.

$$\begin{array}{rcl} 0 \ \leq \ f_{n+1}(x) & = & \sqrt{x} - p_{n+1}(x) \\ & = & \sqrt{x} - p_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - \sqrt{x}^2 - x + p_n^2(x)\right) \ = \ \sqrt{x} - p_n(x) - \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)\left(\sqrt{x} + p_n(x)\right) \\ & = & \left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} + p_n(x)\right)\right) \ = \ f_n(x)\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x} - f_n(x)\right)\right) \\ & = & f_n(x)\left(1 + \dfrac{1}{2}f_n(x) - \sqrt{x}\right) \ \leq \ f_n(x)\left(1 - \dfrac{1}{2}f_n(x)\right) \end{array}$$

car $-\sqrt{x} \leq -f_n(x)$.

On pose $F(t) = t\left(1 - \dfrac{1}{2}t\right) = t - \dfrac{t^2}{2}$. Alors $F'(t) = 1 - t \geq 0$ si $t \in [0,1]$. Ainsi F est croissante sur $[0,1]$. On a donc :

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 = F(0) \leq F(t) \leq F(1) = \frac{1}{2}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq F(f_n(x)) \leq \dfrac{1}{2}$ donc $F(f_n(x)) \in [0,1]$.
D'après ce qui précède, $0 \leq f_1(x) \leq F(f_0(x)) \leq F(1)$, en appliquant F qui est croissante sur $[0,1]$:

$$0 \leq F(f_1(x)) \leq F^2(f_0(x)) \leq F^2(1),$$

et donc $0 \leq f_2(x) \leq F(f_1(x)) \leq F^2(f_0(x)) \leq F^2(1)$.
Par une récurrence simple, on montrerait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leq f_n(x) \leq F^n(1) = F \circ F \circ \cdots \circ F(1) = u_n$$

Donc $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \leq u_n$.
Il reste à montrer que u_n tend vers 0.
Alors $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = F(u_n) = u_n - \dfrac{1}{2}u_n^2$. Etude simple de suite récurrente... laissée au lecteur...