Devoir non surveillé NC 11

à ne pas rendre...

Exercice 1

Extraits du rapport de jury : « *On constate une grande confusion chez beaucoup de candidats entre fonction et nombre, entre série numérique et série de fonctions* ».
« *Il est fréquent de voir les étudiants additionner des équivalents au lieu d'utiliser les développements limités et des* $\circ$. »

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

0. **Questions de cours :** Donner les définitions suivantes.
   - $\sum f_n$ converge simplement (CS) sur I,
   - $\sum f_n$ converge uniformément (CU) sur I,
   - $\sum f_n$ converge normalement (CN) sur I.
1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

   On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.
2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.
3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
5. 5.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sa somme.

   5.2. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. On note $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ sa somme.

   5.3. Montrer que pour tout $x \in J$, on a :

   $$\left|\varphi(x) - \left(\ell + \frac{A}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \frac{B}{2x\sqrt{x}}.$$

   5.4. En déduire que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \frac{A}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 2

Extraits du rapport de jury : *« Nous demandons dans la rédaction des exercices constituant du sujet de la rigueur et une justification des résultats proposés en utilisant le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle ».*
« Nous rappelons qu'il vaut mieux admettre le résultat d'une question clairement et continuer à traiter le reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur ».

Soient n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k$.
2. Soit p un entier naturel non nul.
   Démontrer que $X^p - 1$ est divisible par $X - 1$ et déterminer $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^p - 1 = (X-1)Q(X)$.
3. Soit $P \in E$.
   Montrer qu'il existe un polynôme Q de E tel que :

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E.
5. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer, pour tout Q de E, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.
   Déterminer A et A^{-1}.
7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.
8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?
9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme Q de E.
   À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
   On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.
10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.
11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Exercice 3 (plus difficile)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que 1 est la seule valeur propre de M si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(M^k) = n$.

Exercice 4 (plus difficile)

On définit la suite de fonction $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 : x \in [0,1] \longmapsto 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_n^2(x)\right).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.
2. En déduire la convergence simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver sa limite.
3. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.