Devoir non surveillé 10 - Correction

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Le calcul donne $\chi_A(X) = (X-1)^3$.
2. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ avec $m_1 = 3$.
   Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice I_3 ce qui n'est pas possible car :
   $$\forall P \in GL_2(\mathbb{R}), \quad P^{-1} I_3 P = I_3 \neq A.$$
   Donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$
   En revanche, puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, on peut dire que $\boxed{A \text{ est trigonalisable.}}$
3. La matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc son noyau est de dimension 2. On en trouve facilement une base, soit à partir de l'équation $x + y - z = 0$, soit en trouvant une famille libre de cardinal 2.
   Par exemple, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\{X_1, X_2\}$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On pose alors par exemple $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible ($\det(P) = -1 \neq 0$) donc (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   On sait que $AX_1 = X_1$, $AX_2 = X_2$. Si l'on connaît a, b, c tels que $AX_3 = aX_1 + bX_2 + cX_3$ alors les formules de changement de base donnent :
   $$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$
   Puisque A et T sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique donc $c = 1$. On écrit :
   $$AX_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   On trouve $a = 2$ et $b = -1$. Et donc :
   $$\boxed{\text{Avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2

E3A PC 2022 (Ex3)

un corrigé de F.Ezanno et H.Fontaine

1. $F = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 1 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

2. F et G sont des matrices symétriques réelles de E_n, donc F et G sont diagonalisables.
Donc f et g sont diagonalisables.

3.a. $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3 + \cdots + e_n, e_1)$. Donc la famille $(e_1, e_2 + e_3 + \cdots + e_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g)$.
De plus les deux vecteurs de cette famille ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.
Ainsi $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2 + e_3 + \cdots + e_n)$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$.
Alors $\mathrm{rg}(g) = 2$.
Et $\forall i \in [\![3, n]\!]$, $e_2 - e_i \in \mathrm{Ker}(g)$.
Montrons que la famille $(e_2 - e_i)_{3 \leqslant i \leqslant n}$ est libre :
Soient $(a_3, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-2}$ tel que $a_3(e_2 - e_3) + a_4(e_2 - e_4) + \cdots + a_n(e_2 - e_n) = 0$.
On a donc $(a_3 + \cdots + a_n)e_2 - a_3 e_3 - \cdots - a_n e_n = 0$. Comme $(e_2, \ldots, e_n)$ est libre, tous les coefficients sont nuls. On trouve :

$$a_3 = \cdots = a_n = 0$$

puis $a_2 = 0$.
Finalement, $(e_2 - e_i)_{3 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(g)$.

Et d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}(g) = n - 2$. La famille $(e_2 - e_i)_{3 \leqslant i \leqslant n}$ est composée de $n - 2$ vecteurs.
Donc $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

3.b. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g)$.
$x \in \mathrm{Im}(g)$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x = \alpha e_1 + \beta(e_2 + e_3 + \cdots + e_n).$$

De plus $x \in \mathrm{Ker}(g)$ donc (par linéarité de g) :

$$g(x) = 0 = \alpha g(e_1) + \beta(g(e_2) + g(e_3) + \cdots + g(e_n)).$$

Or $g(e_1) = f(e_1) - e_1 = (e_2 + e_3 + \cdots + e_n)$ et si $j \in [\![2; n]\!]$, $g(e_j) = f(e_j) - e_j = e_1$.
On obtient : $0 = \alpha(e_2 + e_3 + \cdots + e_n) + (n-1)\beta e_1$. Et comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, $\alpha = \beta = 0$ et donc $x = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(g) + \dim \mathrm{Im}(g) = \dim E_n$.
Donc $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires dans E_n.

3.c. 0 est une valeur propre de g et la dimension du sous-espace propre associé est $n-2$ c'est-à-dire la dimension de $\mathrm{Ker}(g)$.
Or g est diagonalisable. Donc $m_0(g) = \dim(E_0(g)) = n - 2$.
Ainsi, g admet deux **autres** valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2.
Or $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(G) = 0$. Alors $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.
Ainsi $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ et $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

3.d.i.A $\diamond$ Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors $g(y) \in \mathrm{Im}(g)$. Donc $\mathrm{Im}(g)$ est stable par g.

$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0$ donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. Donc $\mathrm{Ker}(g)$ est stable par g.

3.d.i.B Rappelons que $g(e_1) = \sum\limits_{i=2}^{n} e_i$ et $g\left(\sum\limits_{i=2}^{n} e_i\right) = (n-1)e_1$.

Donc $H = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.d.i.C Le polynôme caractéristique de H est $\chi_H(X) = X^2 - (n-1)$.

Donc $\mathbf{Sp}(H) = \{-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}\}$.

Et comme $-\sqrt{n-1} \neq \sqrt{n-1}$ $(n > 1)$, alors les sous-espaces propres de h sont de dimension 1.

Remarquons que $H - \sqrt{n-1}I_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} & n-1 \\ 1 & -\sqrt{n-1} \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{Ker}(H - \sqrt{n-1}I_2)$.

De même $H + \sqrt{n-1}I_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} & n-1 \\ 1 & \sqrt{n-1} \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{Ker}(H + \sqrt{n-1}I_2)$.

Finalement $\mathrm{Ker}(H - \sqrt{n-1}I_2) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\mathrm{Ker}(H + \sqrt{n-1}I_2) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

3.d.i.D Ainsi $\mathbf{Sp}(h) = \{-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}\}$ et

$$E_h(-\sqrt{n-1}) = \mathrm{Vect}(\sqrt{n-1}\; e_1 + \sum_{i=2}^{n} e_i) \text{ et } E_h(\sqrt{n-1}) = \mathrm{Vect}(-\sqrt{n-1}\; e_1 + \sum_{i=2}^{n} e_i)$$

3.d.i.E Les valeurs propres de h sont aussi des valeurs propres de g. Donc $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

3.d.ii.A g est diagonalisable et donc il existe une base dans laquelle la matrice de g est $D = \mathrm{diag}\{0, \ldots, 0, \lambda_1, \lambda_2\}$.

Alors la matrice de g^2 dans cette même base est $D^2 = \mathrm{diag}\{0, \ldots, 0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$. Donc

$$\mathbf{Sp}(g^2) \subset \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}.$$

Ainsi $\mathbf{Sp}\,(g^2) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

3.d.ii.B La matrice de g^2 dans la base $\mathcal{B}$ est $G^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

3.d.ii.C En regardant la trace de g^2 indépendante de la base choisie : $\mathrm{tr}(G^2) = 2(n-1) = \mathrm{tr}(D^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

3.d.ii.D Rappelons que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 > 0$. D'après la question précédente, $2(n-1) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

Donc $\lambda_1^2 + (-\lambda_1)^2 = 2(n-1)$ ou encore $\lambda_1^2 = n-1$. Ainsi $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

3.e. D'après la question **??**,

$$E_h\left(-\sqrt{n-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{n-1}\; e_1 + \sum_{i=2}^{n} e_i\right) \text{ et } E_h\left(\sqrt{n-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(-\sqrt{n-1}\; e_1 + \sum_{i=2}^{n} e_i\right)$$

Or les sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres $-\sqrt{n-1}$ et $\sqrt{n-1}$ sont de dimension 1 et contiennent ceux de h associés aux mêmes valeurs propres.

Donc $E_g\left(-\sqrt{n-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{n-1}\; e_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} e_i\right)$ et $E_g\left(\sqrt{n-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(-\sqrt{n-1}\; e_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} e_i\right)$.

Rappelons qu'une base de $\ker(g)$ est $\mathcal{B}_1$.

Donc en posant $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} & \sqrt{n-1} & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & & & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \vdots & & \ddots & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}GP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \cdots, 0)$.

3.f. Id_{E_n} est diagonalisable dans toutes les bases de E_n. Donc la matrice de $f = g + \mathrm{Id}_{E_n}$ est diagonale dans une base qui diagonalise g ou encore $F = G + I_n$.

Ainsi $P^{-1}FP$ est diagonale.

Problème
Mines-Ponts 2016 PSI maths 2

Un corrigé de C.Devulder

A. Exemples

1. Le polynôme caractéristique de D est
$$\chi_D = X^2 + 1$$
Il n'a aucune racine réelle et le spectre réel de D est vide. En particulier D n'a aucune valeur propre réelle non nulle et D est $\mathbb{R}$-quasi-nilpotente.
Le spectre complexe de D est $\{i, -i\}$ et contient au moins un élément non nul donc D n'est pas $\mathbb{C}$-quasi-nilpotente.
2. Le polynôme caractéristique de B est
$$\chi_B = X^2 - \mathrm{Tr}(B)X + \det(B) = X^2$$
Ainsi, le spectre complexe de B est $\{0\}$ et ne contient aucun élément non nul. B est $\mathbb{C}$-quasi-nilpotente.
3. $S_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M - M$ et est un sous-espace.
$A_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M + M$ et est un sous-espace.
$T_n^{++}(\mathbb{K})$ est non vide (il contient 0) et est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous-espace de $M_n(\mathbb{K})$.
Montrons que
$$S_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}, (E_{i,i})_{1\leq i\leq n}\right)$$
   - L'inclusion réciproque est vraie car les $E_{i,j} + E_{j,i}$ et $E_{i,i}$ sont symétriques et car $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace.
   - Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On a
   $$S = \sum_{1\leq i<j\leq n} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}E_{i,i} \in \mathrm{Vect}\left((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}, (E_{i,i})_{1\leq i\leq n}\right)$$
   On a donc aussi l'inclusion directe.

   On remarque ensuite que la famille $((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}, (E_{i,i})_{1\leq i\leq n})$ est libre (on considère une combinaison linéaire nulle et on a immédiatement la nullité des coefficients). Il reste alors à compter le nombre des éléments de cette famille qui est une base de $S_n(\mathbb{K})$:
$$\dim(S_n(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
4. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et donc $\forall T \in T_n^{++}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$. Ceci montre que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent. Comme en question précédente, on montre que
$$T_n^{++}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j}\ :\ 1 \leq i < j \leq n\right)$$
La famille étant libre, c'est une bas et
$$\dim(T_n^{++}(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$$

5. Notons que si $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, XY peut s'interpréter comme le produit scalaire $(X|Y)$ de X et Y vus comme éléments de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$XAX = (X|AX) = (AX|X) = (AX)X = XAX = -XAX$$

On en déduit donc que $(XAX = 0$. En particulier, si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé alors

$$0 = XAX = \lambda \|X\|^2$$

et comme $X \neq 0$ (vecteur propre), $\lambda = 0$. 0 est donc la seule valeur propre réelle possible pour A. On a montré que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent.

6. Comme $n \geq 2$, on peut consdérer la matrice M définie par blocs par $M = ccD0$
$00 \in M_n(\mathbb{R})$. On a

$$\chi_M = X^{n-2}\chi_D = X^{n-2}(X^2 + 1)$$

et le spectre complexe de M est soit égal à $\{i, -i\}$ (cas $n = 2$) soit égal à $\{0, i, -i\}$ (cas $n \geq 3$). Si, par l'absurde, il existait une matrice P comme dans l'énoncé, M serait semblable dans $\mathbb{R}$ à un élément de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc à une matrice dont 0 est la seule valeur propre complexe. La similitude dans $\mathbb{R}$ entraînant immédiatement celle dans $\mathbb{C}$ ($GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$) et le spectre étant un invariant de similitude, on obtient une contradiction.
Il n'existe donc pas de P comme dans l'énoncé.

B. Cas réel

7. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. S est alors diagonalisable (théorème spectral). Si 0 est sa seule valeur propre réelle possible, S est alors semblable à une matrice diagonale nulle et est donc nulle. Réciproquement, 0 est symétrique et quasi-nilpotente. La matrice nulle est ainsi la seule matrice symétrique quasi-nilpotente.
La question 2 montre que le résultat est faux dans le cas complexe (on a trouvé une matrice symétrique complexe quasi-nilpotente qui n'est pas nulle).

8. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente $V \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ et donc V et $S_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe. Ainsi

$$\dim(V) \leq \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

C. Lemme des colonnes

9. La seule matrice quasi-nilpotente de $M_1(\mathbb{K})$ est la matrice nulle (puisqu'une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient). Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas $n = 1$.

10. Un calcul de déterminant par blocs montre que si $M \in V'$ alors

$$\chi_M = X\chi_{K(M)}$$

Les valeurs propres non nulles de $M \in V'$ et celles de $K(M)$ sont donc les mêmes. Si V' est quasi-nilpotent alors $K(V')$ l'est aussi.

11. D'après l'hypothèse de récurrence appliqué à $K(V')$ (sous-espace de $M_{n-1}(\mathbb{K})$), il existe un élément $j \in [|1, n-1|]$ tel que $C_j(K(V')) = \{0\}$. D'après l'hypothèse de l'absurde, il existe une matrice M non nulle dans $C_j(V)$. Comme $j < n$, $M \in V'$ et donc $K(M) \in K(V')$. Comme $M \in C_j(V)$, on a aussi $K(M)$ qui a toutes ses colonnes nulles saus peut-être la j-ème. Finalement, $K(M) \in C_j(K(V'))$ et donc $K(M) = 0$.
M a ainsi une unique colonne qui peut être non nulle (celle numéro j) et seul le dernier coefficient de cette colonne peut être non nul.
Comme $M \neq 0$, il existe $c \neq 0$ tel que $M = cE_{n,j}$. Enfin, V' est un sous-espace vectoriel et $E_{n,j} = M/c \in V' \subset V$.

12. u_σ transforme la base $(e_1,\dots,e_n)$ en $(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$ qui est aussi une base. Cette application linéaire est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}'$.
$(u_\sigma)^{-1}$ envoie $e_{\sigma(i)}$ sur e_i pour tout i et donc e_k sur $e_{\sigma^{-1}(k)}$ pour tout k. On a donc
$$(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$$
13. La colonne j de la matrice de u_σ dans la base canonique est la colonne $e_{\sigma(j)}$. Elle a tous ses coefficients nuls sauf celui en ligne $\sigma(j)$. Son coefficient générique est donc $\delta_{i,\sigma(i)}$. On a donc
$$Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(u_\sigma) = P_\sigma$$
On en déduit que P_σ est inversible et que
$$(P_\sigma)^{-1} Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(u_\sigma^{-1}) = P_{\sigma^{-1}} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{1\le i,j\le n} = (\delta_{\sigma(i),j})_{1\le i,j\le n}$$
14. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. P_σ étant la matrice de changement de base de (e_i) à $(e_{\sigma(i)})$, d'après la formule de changement de base,
$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = Mat_{(e_{\sigma(i)})}(g)$$
Le coefficient à l'intersection des colonne j et ligne i est la coordonnée sur $e_{\sigma(i)}$ de $g(e_{\sigma(j)})$. Or,
$$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^n m_{k,\sigma(j)} e_k = \sum_{l=1}^n m_{\sigma(l),\sigma(j)} e_{\sigma(l)}$$
Finalement,
$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = (m_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1\le i,j\le n}$$
15. V^σ est l'image de V par l'application linéaire $M \mapsto P_\sigma^{-1} M P$ et c'est donc un espace vectoriel.
Le spectre étant un invariant de similitude, le caractère quasi-nilpotent des éléments de V entraîne celui de ceux des éléments de V^σ et V^σ est un sous-espace quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$.
Enfin, fixons $k \in [|1,n|]$. D'après l'hypothèse de l'absurde, on peut trouver M non nulle dans $C_{\sigma(k)}(V)$. On a en particulier $m_{l,c}$ qui est nul si $c \neq \sigma(k)$ ce que l'on peut écrire $m_{\sigma(l),\sigma(c)} = 0$ si $\sigma(c) \neq \sigma(k)$ ou encore si $c \neq k$. La matrice $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ est donc dans $C_k(V^\sigma)$. Elle est non nulle car M l'est (et $A \mapsto P_\sigma^{-1} A P$ est un isomorphisme). On a montré que
$$\forall k \in [|1,n|],\ C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$$
16. V^σ et V ont les mêmes propriétés (sous-espaces quasi-nilpotents tels que pour tout k, $C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$). Pour tout σ, on peut donc appliquer la question 11 à V^σ et dire qu'il existe $k \in [|1,n-1|]$ tel que $E_{n,k} \in V_\sigma$ ou encore que $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} \in V$.
D'après la question 14, pour tout choix de σ on a $P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma = E_{\sigma^{-1}(u),\sigma^{-1}(v)}$ (en effet en notant $N = P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma$, on a $N_{i,j}$ qui est égal au coefficient $(\sigma(i),\sigma(j))$ de $E_{u,v}$ et est nul sauf si $\sigma(i) = u$ et $\sigma(j) = v$). En appliquant ceci avec σ^{-1}, on a donc $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n),\sigma(k)}$.
Fixons $j \in [|1,n|]$. Appliquons ceci avec σ la bijection qui se contente de permuter j et n en laissant les autres éléments invariants (c'est l'identité si $j = n$). On trouve alors $k \in [|1,n-1|]$ tel que $E_{\sigma(n),\sigma(k)} = E_{j,\sigma(k)} \in V$. On a bien sûr $\sigma(k) \neq j$ car $k \neq n$ et σ est une bijection qui envoie déjà n sur j.
On a prouvé que
$$\forall j \in [|1,n|],\ \exists\, f(j) \neq j /\ E_{j,f(j)} \in V$$
17. Posons $i_1 = 1$ et, pour tout $k \ge 2$, $i_k = f(i_{k-1})$. L'ensemble $\{i_k /\ k \in \mathbb{N}^*\}$ est inclus dans $[|1,n|]$ et donc fini. Or, $\mathbb{N}^*$ est infini. Il existe donc deux i_k égaux pour des valeurs de k différentes : $i_a = i_b$ avec $a < b$. En partant de i_a et en itérant successivement par f, on finit par retomber sur i_a. On regarde la première fois où on retrouve i_a et ce n'est pas à la première itération car $f(j) \neq j$ pour tout j. On trouve des indices $i_a, i_{a+1}, \dots, i_{a+p-1}$ avec $p \ge 2$ deux à deux distincts images succesifs les uns des autres par f et avec $f(i_{a+p-1}) = f(i_a)$.
En posant $j_1 = i_a$, $j_2 = i_{a+1}$, …, $j_p = i_{a+p-1}$, on a des éléments deux à deux distincts et
$$\forall k \in [|1,p-1|],\ f(j_k) = j_{k+1} \ \text{ et } \ f(j_p) = j_1$$

18. On applique le procédé décrit ci-dessus. On gère un tableau `t` de booléens à $n+1$ case numéroté à partir de 0 et dont la case 0 sera inutile (mais cela permet de respecter la notation python). Initialement toutes les cases valent `False`. On part de 1 et on pose `t[1]=True` puis on calcule $f(1)$ et on regarde, grâce au tableau `t`, si cette valeur a déjà été détectée. Si c'est le cas, cela signifie que l'on a un cycle de $f(1)$ à lui même. Sinon, on met la valeur `True` dans `t`$[f(1)]$ (on a rencontré l'élément $f(1)$) et on recommence avec $f(1)$ en calculant donc $f(f(1))$. On gère ainsi une variable `i` qui prend successivement les valeurs $1, f(1), \dots$.

```
t=[False]*(n+1)
i=1
while not(t[f(i)]):
    t[f(i)]=True
    i=f(i)
```

A ce niveau, il y a une boucle de `i` vers lui même quand on itère par f et il suffit de partir de `i` et d'itérer en stockant jusqu'à retomber sur `i`.

```
l=[i]
k=f(i)
while k!=i:
    l.append(k)
    k=f(k)
return(l)
```

19. N est une matrice comportant p valeurs non nulles qui sont égales à 1. Il y a un coefficient 1 sur chaque ligne $j_1, \dots, j_p$ et aussi un sur chaque colonne $f(j_1), \dots, f(j_p) = j_2, \dots, j_p, j_1$. On en déduit que le vecteur $\sum_{k=1}^{p} e_{j_k}$ est propre pour N associé à la valeur propre 1.
Ceci est contradictoire car $N \in V$ (comme somme d'éléments de V qui est un espace vectoriel) et ne devrait posséder aucune valeur propre non nulle. Ceci clôt le raisonnement par l'absurde.

D. Cas général

20. Considérons l'application $\Phi\ :\ M \in V \mapsto (K(M), L(M))$. Si $\Phi(M) = 0$ alors $L(M) = 0$ et $K(M) = 0$. Or $C_n(V) = 0$ et ces conditions impliquent donc que $M = 0$. Le noyau de Φ est égal à $\ker(K) \cap \ker(L)$ et Φ (qui est linéaire) est injective. On a ainsi

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\Phi(V))$$

On peut trouver un supplémentaire W' de W dans V et on a (par injectivité de Φ)

$$\Phi(V) = \Phi(W) \oplus \Phi(W')$$

On a $\Phi(W) = \{(K(M), L(M))/\ M \in W\} = \{(K(M), 0)/\ M \in W\}$ qui est isomorphe à $K(W)$ et donc de même dimension.
$W = \ker(L)$ et par théorème du rang, W' est isomorphe à $L(V)$ qui est de dimension $\leq n-1$. $\Phi(W')$ qui est isomorphe à W' est donc aussi de dimension $\leq n-1$. Finalement,

$$\dim(V) = \dim(\Phi(V)) \leq \dim(K(W)) + n - 1$$

21. Soit $M \in W$; on a $M = ccK(M)R(M)$
$0a(M)$ qui est quasi nilpotente (car dans V) et ses valeurs propres sont celles de $K(M)$ et $a(M)$. Ainsi $K(M)$ n'a pas de valeur propre non nulle (et $a(M) = 0$). Ceci montre que l'espace vectoriel $K(W)$ est quasi-nilpotent. D'après l'hypothèse de récurrence, sa dimension est plus petite que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
La question précédente donne alors

$$\dim(V) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

22. D'après le lemme des colonnes, il existe j tel que $C_j(V) = \{0\}$. Considérons la permutation σ qui échange j et n. V^σ est alors isomorphe à V et est un espace vectoriel quasi-nilpotent auquel on peut appliquer le cas précédent. On a donc

$$\dim(V) = \dim(V^\sigma) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$