Devoir non surveillé 10

à rendre le mardi 26 novembre

Exercice 1 (à travailler en autonomie)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. Déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire, et préciser cette matrice.

Le corrigé de cet exercice sera bientôt en ligne.

Exercice 2

Dans cet exercice, on admettra qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique.
On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall j \in [\![2, n]\!], f(e_j) = e_1 + e_j \right) \text{ et } \left(g = f - id_{E_n} \right).$$

1. Donner, dans la base $\mathcal{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g.
2. Justifier que f et g sont diagonalisables.
3. **Diagonalisation de f et de g dans une même base**
   (a) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(g)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires dans E_n.
   (c) Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.
   (d) On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :
      i. **Méthode 1**
         A. Démontrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont stables par g.
         B. Déterminer la matrice H dans la base $\mathcal{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\mathrm{Im}(g)$ induit par g.
         C. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de H.
         D. En déduire les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h.
         E. Quelles sont les valeurs de λ_1 et λ_2 ? Justifier.
      ii. **Méthode 2**
         A. Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.
         B. Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathcal{B}$.
         C. En déduire, en fonction de n, la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.
         D. Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

(e) Déterminer une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$

telle que $P^{-1}GP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \cdots, 0)$. On ne demande pas de déterminer P^{-1}

(f) Justifier que la matrice $P^{-1}FP$ est diagonale.

Ce qui suit est facultatif (ce problème est à travailler sur 2 semaines)

Problème

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Etant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $M_n(\mathbb{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i, j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée M^T.

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.

On note $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ les sous-ensembles de $M_n(\mathbb{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.

On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers,

$$\Delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1 *Etant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{K})$, et un élément j de $[\![1, n]\!]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ème.*

Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$, on notera $K(M) \in M_{n-1}(\mathbb{K})$, $R(M) \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $L(M) \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a(M) \in \mathbb{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right) \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : M_n(\mathbb{K}) \to M_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L : M_n(\mathbb{K}) \to M_{1,n-1}(\mathbb{K})$, évidemment linéaires.

Objectifs

Définition 2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est* **quasi-nilpotente** *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. Une partie V de $M_n(\mathbb{K})$ est dite* **quasi-nilpotente** *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $M_n(\mathbb{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énoncé comme suite.

Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent N de $M_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{QN}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie C.
Lemme (Lemme des colonnes) *Pour tout sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[\![1,n]\!]$ tel que $C_j(V)=\{0\}$.*

A. Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que la matrice $D=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$?
2. Montrer que la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$.
3. Montrer que $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ sont des sous-esapces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que la dimension de $S_n(\mathbb{K})$ est $n(n+1)/2$.
4. Montrer que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{K})$. Vérifier que
$$\dim(T_n^{++}(\mathbb{K}))=\frac{n(n-1)}{2}$$
5. Soit $A\in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^TAX=0$. En déduire que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$.
6. Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que
$$A_n(\mathbb{R})=\{PMP^{-1}/\ M\in T_n^{++}(\mathbb{R})\}$$
Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n=2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite à la question 1

B. Cas réel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

7. Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $M_n(\mathbb{R})$. Le résultat obtenu tient-il si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?
8. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que
$$\dim(V)\leq\frac{n(n-1)}{2}$$

C. Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

9. Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n=1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n\geq 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $M_n(\mathbb{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V)\neq\{0\}$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit

$$M=\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right)$$

10. Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_{n-1}(\mathbb{K})$.
11. En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui même. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On considère la matrice P_σ de $M_n(\mathbb{K})$:

$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \le i,j \le n}$$

12. Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.
13. Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.
14. Pour $M \in M_n(\mathbb{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ.
    On pourra utiliser un changement de base.
15. Montrer que l'ensemble
    $$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\}$$
    est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
16. En déduire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on peut choisir un $f(j) \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(i)} \in V$. On obtient ainsi une fonction
    $$f\ :\ [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$$
17. En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1, \ldots, j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ telle que
    $$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ f(j_k) = j_{k+1} \ \text{ et } \ f(j_p) = j_1$$
18. Ecrire un algorithme qui permet d'identifier une telle suite connaissant les valeurs de f.
19. Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)}$ et conclure.

D. Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n - 1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, et en particulier de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K\ :\ V \to M_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L\ :\ V \to M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}$$

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que $C_n(V) = \{0\}$.

20. Montrer que $\dim(V) \leq \dim(K(W)) + (n-1)$.
21. En déduire que $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0\}$.

22. Démontrer que $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.