PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Devoir non surveillé 0 : travail à rendre

à rendre le lundi 2 septembre

Voici le travail à faire et à rendre pour la rentrée.
Tout d'abord, pourriez m'envoyer rapidement un mail avec :

- votre nom, votre prénom et votre classe d'origine,
- votre adresse email (j'ai besoin d'une adresse gmail pour le partage de documents, mais je peux utiliser une autre adresse pour la communication des informations)
- une photo de vous récente (pas forcément une photo d'identité, ça peut être une photo prise avec le portable),
- si cela est possible, un petit mot de vous : avez-vous des projets particuliers (écoles ou autres) ? comment avez-vous vécu votre première année (difficulté, intérêt, motivation, charge de travail....) ? Appréciez-vous les mathématiques ? Toute autre remarque relative à la prépa...

Ce qui suit n'est pas très difficile. Il s'agit très souvent d'exercices similaires à ceux du DNS0 (autre document). Cela n'aurait donc aucun intérêt de commencer à cherher ce devoir sans avoir travaillé l'autre partie. Vous porterez une attention particulière à la rédaction, c'est un point très important pour progresser en mathématiques.

N'hésitez pas à m'envoyer vos questions (mathématiques ou autres) par mail. Je peux aussi donner des exercices plus difficiles à ceux qui ont tout terminé.

dion.mouze@free.fr

Partie I : Algèbre linéaire

Exercice 1

L'ensemble des suites réelles géométriques est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 2

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et
$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E,\ M^T = M\}.$$
Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3

Montrer rapidement que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - y = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}$.
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y = 0\}$.

Exercice 4

Dans $\mathbb{C}^3$, on note $u_1 = (1, i, 0)$, $u_2 = (1, 1, 2 + 2i)$ et $u_3 = (1, 0, 2)$.
La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

Exercice 5

Dans $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = x\cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f_4(x) = x\sin(x).$$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une famille libre.

Exercice 6

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère une famille de polynômes $(L_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 1$, $L_1(X) = 1 - X$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)L_n(X) + nL_{n-1}(X) = XL_n(X).$$

1. Calculer L_2 et L_3.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré et le terme dominant de L_n.
3. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E,\ M^T = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E,\ M^T = -M\}.$$

On rappelle que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. En utilisant les définitions du cours (noyau, image, somme, intersection), montrer les inclusions suivantes.

1. $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ (on rappelle que $f^2 = f \circ f$)
2. $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$
3. $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$
4. $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 9

Dans cet exercice, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P)(X) = (2X+4)P(X) - (X^2 + X - 2)P'(X).$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ de φ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer le noyau de φ. On donnera un polynôme P_0 tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{P_0\}$.
4. Déterminer l'image de φ. On donnera des polynômes P_1 et P_2 tels que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{P_1, P_2\}$.
5. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
6. L'endomorphisme φ est-il un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$?
7. Démontrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire la matrice de φ dans cette base.

Exercice 10

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application Γ_A sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Gamma_A(M) = AM.$$

1. Montrer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application Γ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $A \longmapsto \Gamma_A$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
3. Montrer que si $A^2 = 0$, alors $\Gamma_A^2 = \Gamma_A \circ \Gamma_A = 0$.

Exercice 11

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \text{Vect}\{(1, -1, 2)\}$ et $G = \{(x, y, z) \in E,\ 2x - y - 2z = 0\}$.

1. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.
2. On note p la projection sur G dans la direction de F.
   Ecrire la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12

Soient E est un espace vectoriel de dimension finie, p et q des projecteurs de E.
Montrer : $\text{Ker }(p) = \text{Ker }(q) \iff p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Partie II : Analyse

Exercice 13

Déterminer les développements limiés suivants.

$f_1(x) = e^{\cos(2x)}$ à l'ordre 4 en 0

$f_2(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0

$f_3(x) = \dfrac{\cos(\sin(x))}{1 + \text{sh}(x)}$ à l'ordre 3 en 0

$f_4(x) = \sqrt{\dfrac{\text{Arctan}(x)}{x}}$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 14

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes aux points indiqués.

$g_1(x) = \dfrac{\ln^3(x) + x^2 + 2x\sin(x)}{e^x - x^3}$ en $+\infty$

$g_2(x) = \dfrac{e^x - \cos(x)}{\ln(1 + \text{sh}(x))}$ en 0

$g_3(x) = 2\ln(x + 1) - \ln(x + 2) - \ln(x)$ en $+\infty$

$g_4(x) = \dfrac{\ln(x)}{(x^x - 1)\sqrt{1 + x}}$ en 1

Exercice 15

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'équation $xe^{\sqrt{x}} = \sqrt{n}$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$. On note x_n cette solution.
2. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et déterminer un équivalent simple de x_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16

Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\mathrm{sh}(x)}-\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n\ln(n^3+2)}{\ln(n-1)n^2+2} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(n)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{1/x^2} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\ln(n)} \qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(x\ln(x+1)-x\ln(x-1)\Big)$$

Exercice 17

Déterminer u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants.

1. $u_0=1, u_1=-1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.
2. $u_0=1, u_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n$.
3. $u_0=0, u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$.

Exercice 18

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0\in\mathbb{R}$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1.$$

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 19

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+u_n}$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa nature.
2. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}$?

   En déduire que $\sum \dfrac{1}{u_n^2}$ converge.
3. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$?

   En déduire que $\sum \dfrac{1}{u_n}$ diverge.

Exercice 20

1. Etudier la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$.
2. Soit $k\geq 3$ un entier. Démontrer que $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)}\leq\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t\ln(t)}\leq\frac{1}{k\ln(k)}$.
3. On note $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$. Démontrer que $\forall n\geq 3,\quad \displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}\frac{1}{k\ln(k)}\leq\int_3^{n+1}\frac{dt}{t\ln(t)}\leq\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$.

   En déduire que $S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(\ln(n))$.
4. Quelle est la nature de la série $\sum\dfrac{1}{n\ln(n)}$? Quelle est la nature de la série $\sum\dfrac{1}{nS_n}$?