PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Devoir non surveillé 0 : révisions et entraînement

Pendant ces vacances estivales, il est important de prendre du repos et de se détendre. Mais il est aussi absolument indispensable de bien préparer sa rentrée pour ne pas être débordé les premières semaines.

En mathématiques, le travail de révision demandé est le suivant. Il est volontairement ciblé sur quelques notions et sera évalué en interrogation et en colle. Ce travail doit être terminé pour la rentrée, car le démarrage est très rapide en 2ème année (en maths et dans toutes les disciplines).

1. Programme de « Colle A » : Interrogation le jeudi 5 septembre

- Revoir le cours et les TD de MPSI/PCSI sur les nombres complexes, trigonométrie et les coefficients binômiaux.
- **Apprendre et compléter le Chapitre 1 (Rappels sur les complexes)**. Pour cela, chercher les exercices et exemples au brouillon, puis utiliser le corrigé en ligne (`dion.mouze.free.fr`) pour rédiger soigneusement les solutions sur le livret.

Les polys de cours seront ramassés le jour de la rentrée (lundi 2 septembre)

- Apprendre les thèmes 1 et 2 du Vade Mecum.

Vous serez interrogés sur les énoncés (Chapitre 1 et Vade Mecum) et sur les **(E1)** et **(E2)** du Chapitre 1.

2. Programme de « Colle B » : Interrogation le jeudi 12 septembre ou Colle n°1 et/ou DS1

- Revoir le cours et les TD de MPSI/PCSI sur les polynômes.
- **Apprendre et compléter le Chapitre 2 (Rappels sur les polynômes)**. Pour cela, chercher les exercices et exemples au brouillon, puis utiliser le corrigé en ligne (`dion.mouze.free.fr`) pour rédiger soigneusement les solutions sur le livret.

Les polys de cours seront ramassés le jour de la rentrée (lundi 2 septembre)

- Revoir le cours et les TD de MPSI/PCSI sur les espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres ou génératrices, applications linéaires.
- Apprendre les thèmes 3 (sauf 3.4), 11 et 12 du Vade Mecum.
- Travailler en autonomie la partie 1 de ce qui suit.

Vous serez interrogés sur les énoncés (Chapitre 2, Vade Mecum, partie 1) et sur les **(E1)** et **(E2)** du Chapitre 2, et sur les exercices de la partie 1.

3. Programme de « Colle C » : Colle n°1 ou Colle n°2 et/ou DS1

- Revoir le cours et les TD de MPSI/PCSI sur les développements limités, les calculs de limites, les suites et les séries numériques.
- Apprendre les thèmes 6, 8 et 9 du Vade Mecum.
- Travailler en autonomie la partie 2 de ce qui suit.

Vous serez interrogés sur les énoncés (Vade Mecum, partie 2), sur les exercices de la partie 2, et sur les premiers chapitres traités en classes.

4. Devoir DNS0 classique à rendre le mardi 3 septembre.

Ceux qui ont tout terminé peuvent me demander des exercices supplémentaires facultatifs :

`dion.mouze@free.fr`

Partie I : Algèbre linéaire

I.1 - Espaces vectoriels

Vade Mecum

Thème 11 : Sous-espaces vectoriels et applications linéaires.

On rappelle que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les ensembles suivants sont munis d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\mathbb{K}^p, \; \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \; \mathbb{K}[X], \; \mathcal{F}(U,\mathbb{K}) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{K}, \; f \text{ application}\}$$

Si E, F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : $\mathcal{F}(U,E), \mathcal{L}(E,F)$

Démontrer qu'un ensemble $(F, +, .)$ est un espace vectoriel en revenant à la définition est assez long. Très souvent, on montrera que F est un sous-espace vectoriel de l'un des espaces vectoriels de référence précédents. Plus précisément, si F est contenu dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in F^2, \; \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda x + \mu y \in F \end{array}\right.$$

Ainsi, 0 est toujours dans un espace vectoriel F, la somme $x+y$ de deux éléments x et y de F est encore dans F, et les multiples λx d'éléments x de F sont encore dans F.

Exercice rédigé 1

En utilisant ces arguments, justifier que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels.

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3, x + y - 3z = 2\}$
2. $F_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; f \text{ est croissante}\}$
3. $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; x^2 = y^2\}$.

Solution :

1. $0_{\mathbb{C}^3} = (0,0,0)$ *n'est pas dans* F_1 *donc* F_1 *n'est pas un espace vectoriel.*

2. $Id : x \longmapsto x$ *est dans* F_2 *et pas* $-Id$. *Donc* F_2 *n'est pas un espace vectoriel.*
Attention, la fonction nulle est à la fois croissante et décroissante (et c'est la seule !).

3. $(1,1)$ *et* $(-1,1)$ *sont dans* F_3 *mais pas leur somme* $(0,2)$. *Donc* F_3 *n'est pas un espace vectoriel.*

Exercice rédigé 2

Montrer que l'ensemble F des fonctions paires $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution : *On a :*

• $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

• F *est non vide car la fonction identiquement nulle est paire.*

• *Enfin, soient* f, g *deux fonctions de* F *et* λ, μ *des réels. Montrons que* $\lambda f + \mu g$ *est paire. Puisque* f *et* g *sont paires, on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ *et* $g(-x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f + \mu g)(-x) &= \lambda f(-x) + \mu g(-x) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \; = \; (\lambda f + \mu g)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda f + \mu g \in F$ *et* F *est bien stable par combinaisons linéaires.*

Conclusion : $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \text{ c'est donc un espace vectoriel.}}$

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut aussi montrer qu'il s'écrit $\mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}$.

Exercice rédigé 3

Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution :
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\iff \quad 2x - y + z = 0 \quad \iff \quad y = 2x + z \\ &\iff \quad u = (x, y, z) = (x, 2x + z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1) \\ &\iff \quad u \in \mathrm{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\} \text{ est un espace vectoriel.}}$

Remarque : en écrivant z en fonction de x, y (ou x en fonction de y, z), on aurait obtenu d'autres bases.

I.2 - Familles de vecteurs

Vade Mecum

Thème 12 : Familles libres, liées, génératrices

Exercice rédigé 4

Soient $f : x \longmapsto e^x$, $g : x \longmapsto e^{2x}$ et $h : x \longmapsto e^{3x}$.
Démontrer que $\{f, g, h\}$ est une famille libre.

Solution : $\boxed{\text{Soient } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } af + bg + ch = 0.}$

C'est une égalité de **fonctions** *qui s'écrit :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a.f(x) + b.g(x) + c.h(x) = 0.$$

On veut montrer que a, b et c sont nuls.

Les vecteurs sont ici des applications. On pourra si nécessaire (et si c'est possible) :
- *donner une valeur à x (c'est une spécialisation)*
- *faire tendre x vers une limite ℓ éventuellement infinie*
- *dériver, intégrer...*

Dans cet exercice, on choisit la deuxième possibilité. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ae^x + be^{2x} + ce^{3x} = e^{3x}(ae^{-2x} + be^{-x} + c) = 0$$

Et donc, puisque e^{3x} n'est pas nul, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ ae^{-2x} + be^{-x} + c = 0$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient $c = 0$.
On divise alors l'égalité de départ par e^{2x} et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ ae^{-x} + b = 0$.
Là encore, lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient $b = 0$.
Il reste $af = 0$ et, par exemple, en spécialisant en $x = 0$, on trouve $a = 0$.
On obtient $\boxed{a = b = c = 0}$ *et donc :*
Conclusion : $\boxed{\{f, g, h\} \text{ est une famille libre.}}$

Exercice rédigé 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on note

$$u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (2,-1,3) \text{ et } u_3 = (1,0,1).$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

Solution :

On résout $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Si $(a,b,c) = (0,0,0)$ est la seule solution, alors la famille est libre. Sinon, on obtient une (ou plusieurs) relation linéaire non triviale liant u_1, u_2, u_3.

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a+2b+c=0 \\ a-b=0 \\ 3b+c=0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a=b \\ c=-3b \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad (a,b,c) = (b,b,-3b)
\end{aligned}$$

Finalement pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $bu_1 + bu_2 - 3bu_3 = 0$ et donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ n'est pas libre.}}$
En particulier, avec $b = 1$, on trouve la relation linéaire non triviale suivante.

$$u_1 + u_2 - 3u_3 = 0.$$

I.3 - Espaces vectoriels de dimension finie

Un espace vectoriel E de dimension finie, est un **espace vectoriel qui possède une famille génératrice finie**. On peut démontrer dans ce cas qu'il possède des bases et qu'elles sont toutes de même cardinal. On appelle *dimension* de E, le cardinal de ces bases. On peut utiliser sans le redémontrer :

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n, \qquad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np \quad \text{et} \quad \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1.$$

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E.

$\boxed{\text{Les bases de } E \text{ sont les familles libres de cardinal maximal.}}$

- Si $\mathcal{F}$ est libre alors $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
- Si $\text{card}(\mathcal{F}) > \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est liée.
- Si $\mathcal{F}$ est libre et si $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

$\boxed{\text{Les bases de } E \text{ sont les familles génératrices de cardinal minimal.}}$

- Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $\text{card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.
- Si $\text{card}(\mathcal{F}) < \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ n'engendre pas E.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice et si $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

Exercice rédigé 6

1. Soit $\mathcal{F} = (P_1, \ldots, P_n)$ une famille de $\mathbb{R}[X]$. Rappeler la définition de « $\mathcal{F}$ est échelonnée en degrés ».
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $P_0 = 1, P_1 = (X-a), P_2 = (X-a)^2, \ldots, P_n = (X-a)^n$.
   Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Solution :

1. Soit $\mathcal{F} = (P_1, \ldots, P_n)$ une famille de $\mathbb{R}[X]$. La famille « $\mathcal{F}$ est échelonnée en degrés » si

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n).$$

2. C'est une famille échelonnée en degrés de polynômes **non nuls** *donc elle est libre (point de cours à savoir).*
De plus, son cardinal est $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ donc :

$$\boxed{\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3. Puisque $\deg(P) \leq n$, on a $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ (formule de Taylor pour un polynôme).
Et donc les coordonnées du polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base sont :

$$\left(P(a), P'(a), \frac{P''(a)}{2!}, \ldots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right).$$

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a (**à connaître !**) :

$$E = F \oplus G \underset{\text{définition}}{\iff} \forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ \exists! z \in G, \quad x = y + z$$

$$\underset{\text{caractérisation}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} F \cap G = \{0\} \\ E = F + G \end{array} \right.$$

Lorsque E est de dimension finie (et connue !), on pourra utiliser les équivalences suivantes.

$$E = F \oplus G \iff \left\{ \begin{array}{l} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ E = F + G \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ F \cap G = \{0\} \end{array} \right.$$

Exercice rédigé 7

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants.

$$P = \{(x,y,z) \in E, x + 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad D = \{(x,y,z) \in E, x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}.$$

1. Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base de P et une base de D.
3. Montrer que P et D sont supplémentaires dans E.

Solution :

1. *Soit* $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a les équivalences suivantes.*

$$\begin{aligned} u\in P &\iff x+2y-z=0\\ &\iff u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\x+2y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\\ &\iff u\in\mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,2)\}\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} u\in D &\iff x+y=0 \text{ et } y+z=0\\ &\iff u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\y\\-y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\\ &\iff u\in\mathrm{Vect}\{(-1,1,-1)\}\end{aligned}$$

Ainsi, $P=\mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,2)\}$ *et* $D=\mathrm{Vect}\{(-1,1,-1)\}$ *et donc*

$$\boxed{P \text{ et } D \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E.}$$

2. *D'autre part, les* **deux** *vecteurs* $(1,0,1)$ *et* $(0,1,2)$ *ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. De même* **le** *vecteur* $(-1,1,-1)$ *est non nul, donc il forme une famille libre. Ainsi :*

$$\boxed{\{(1,0,1),(0,1,2)\} \text{ est une base de } P \text{ et } \{(-1,1,-1)\} \text{ est une base de } D.}$$

3. *On a toujours* $0\in P\cap D$, *puisque* $P\cap D$ *est un espace vectoriel.*
Soit $u\in P\cap D$.
On a $u\in D=\mathrm{Vect}\{(-1,1,-1)\}$ *donc il existe* $a\in\mathbb{R}$ *tel que* $u=a(-1,1,-1)=(-a,a,-a)$.
On a aussi $u\in P=\{(x,y,z)\in E, x+2y-z=0\}$ *donc* $-a+2a-(-a)=0$. *Ainsi* $a=0$, *puis* $u=0$.
Par conséquent, $P\cap D=\{0\}$.

De plus, $\dim(P)+\dim(D)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, *donc* $\boxed{\mathbb{R}^3=P\oplus D.}$

Remarque : *On aurait pu aussi utiliser la méthode suivante.*
$\{(1,0,1),(0,1,2)\}$ *est une base de* P *et* $\{(-1,1,-1)\}$ *est une base de* D, *donc* P *et* D *sont supplémentaires dans* E *si la famille concaténée* $\{(1,0,1),(0,1,2),(-1,1,-1)\}$ *est une base de* E.

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Donc $\{(1,0,1),(0,1,2),(-1,1,-1)\}$ *est une base de* E *et* $\boxed{\mathbb{R}^3=P\oplus D.}$

I.4 - Applications linéaires

Vade Mecum

Thème 11 : Sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Une application linéaire est une application f définie sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, à valeurs dans un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel F et qui est « compatible » avec leur structure d'espaces vectoriels.

Plus précisément, on rappelle la définition suivante.
On dit que $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1. $\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
2. $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires, c'est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
On appelle forme linéaire une application linéaire de E dans $\mathbb{K} = F$, et endomorphisme une application linéaire de E dans $E = F$.
On notera $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Remarque 1 : Trés souvent, les élèves confondent les définitions de sous-espace vectoriel et d'application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, cela n'a aucun sens d'essayer de montrer que 0 appartient à f ! ! !

Remarque 2 : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

Remarque 3 : Les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sont données par des expressions linéaires en les coordonnées. Par exemple :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f(u) = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x + y + 3z \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Exercice rédigé 8

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Solution :
On raisonne par double implication.

• *Supposons que* $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
Soit $x \in E$. *On a* $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ *donc* $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. *Ainsi* $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0$. *Ceci est vrai pour tout* x *de* E *donc* $f \circ g = 0$.

• *Réciproquement, supposons que* $g \circ f = 0$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. *Par définition, il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$.
Alors, $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$ *et donc* $y \in \mathrm{Ker}(g)$. *On a bien montré* $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

I.4 - Projecteurs : Très important !

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$.
2. Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle **projection** sur F dans la direction de G l'application suivante.

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array} \right.$$

Ces deux objets (projecteur, projection) n'en font qu'un. C'est-à-dire que tout projecteur est une projection et toute projection est un projecteur. On redémontrera cette année la proposition suivante qu'il faut connaître.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
1. Soit p un projecteur de E.
Alors $E =$Im$(p)\oplus$Ker(p) et p est la projection sur Im(p) dans la direction de Ker(p).
2. Si $E = F \oplus G$ et si p est la projection sur F dans la direction de G alors p est un projecteur et $F =$Im(p) et $G =$Ker(p).

Exercice rédigé 9 (Résultat à connaître!)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et p un projecteur de E.
Montrer que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id_E)$.

Solution :
On sait que $p \in \mathcal{L}(E)$ et que $p \circ p = p$. On raisonne par double inclusion.
• *Soit $y \in \text{Im}(p)$.*
Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Et donc $(p - Id_E)(y) = p(y) - y = p(p(x)) - p(x) = p \circ p(x) - p(x) = 0$.
Ainsi $y \in \text{Ker}(p - Id_E)$. On a donc déjà démontré l'inclusion $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(p - Id_E)$.
• *Soit $y \in \text{Ker}(p - Id_E)$. On a donc $y = p(y) \in \text{Im}(p)$. On a démontré l'inclusion $\text{Ker}(p - Id_E) \subset \text{Im}(p)$ d'où le résultat.*

L'exercice suivant est à savoir faire sans hésitation. Deux méthodes de résolution sont proposées.

Exercice rédigé 10

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ et $G = \{(x, y, z) \in E,\ x + y - z = 0\}$.

1. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.
2. On note p la projection sur G dans la direction de F.
Déterminer l'image par p d'un vecteur $u = (x, y, z) \in E$.
3. Ecrire la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution : *Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ et $G = \{(x, y, z) \in E,\ x + y - z = 0\}$.*

1. *On donne deux méthodes.*

   • **Avec un argument de dimension :**
   D'une part, si $u \in F \cap G$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = (a, a, a)$ et tel que $a + a - a = 0$.
   On obtient $a = 0$, puis $u = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0, \}$.
   D'autre part, F est une droite vectorielle et G un plan vectoriel donc

$$\dim(F) + \dim(G) = 1 + 2 = 3 = \dim(E).$$

   Par conséquent $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

- **Avec un raisonnement par analyse et synthèse :**

Analyse : *Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons connaître $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$.*
On a $v \in F$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = (a, a, a)$. Alors $w = u - v = (x-a, y-a, z-a) \in G$ s'écrit :

$$(x-a) + (y-a) - (z-a) = 0.$$

Par conséquent, $a = x + y - z$ et

$$\begin{array}{rcl} v &=& (x+y-z).(1,1,1) \\ w &=& (-y+z, -x+z, -x-y+2z) \end{array}$$

Ainsi, si v et w existent, ils sont uniquement déterminés par ces égalités.

Synthèse : *On vérifie que v et w conviennent*
D'une part, $v + w = (x, y, z) = u$.
D'autre part, $v = (x+y-z).(1,1,1) \in F =$Vect$\{(1,1,1)\}$.
Et enfin, $(-y+z) + (-x+z) - (-x-y+2z) = 0$ donc $w \in G$.

Conclusion : *On a démontré que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $v \in F$ et un unique $w \in G$ tels que $u = v + w$. C'est la définition de* $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G.}$

Remarque : *Cette méthode est plus longue, mais le temps perdu ici sera récupéré dans la question suivante !*

2. *On note p la projection sur G dans la direction de F.*

En utilisant la première méthode : *On sait que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ donc pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $u \in F$ et un unique $w \in G$ tels que $u = v + w$. Par définition de p, on a $w = p(u)$. Déterminons donc w.*
On a $v \in F$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = (a, a, a)$. Alors $w = x - v = (x-a, y-a, z-a) \in G$ s'écrit :

$$(x-a) + (y-a) - (z-a) = 0.$$

Par conséquent, $a = x + y - z$ et

$$\begin{array}{rcl} v &=& (x+y-z).(1,1,1) \\ w &=& (-y+z, -x+z, -x-y+2z) \end{array}$$

On a donc $\boxed{p(u) = w = (-y+z, -x+z, -x-y+2z).}$

En utilisant la seconde méthode : *Le raisonnement par analyse et synthèse nous donne directement :*

$$\boxed{p(u) = w = (-y+z, -x+z, -x-y+2z).}$$

3. *La matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est déterminée par* $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ -x+z \\ -x-y+2z \end{pmatrix}$.

On trouve $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$

Partie II : Analyse

II.1 - Développements limités

Vade Mecum

Thème 6 : Développements limités et applications

On peut ajouter, multiplier des développements limités en prenant soin de s'assurer de l'ordre jusqu'auquel on peut aller. On peut aussi composer des développements limités : **attention**, si on utilise un développement de f en 0 pour trouver celui de $f \circ g$, il faut que $g(x)$ tende vers 0 quand x tend vers 0.

Lorsque ce n'est pas le cas, on utilisera les propriétés algébriques des fonctions usuelles pour s'y ramener.

- $\exp(a+u(x)) = \exp(a)\exp(u(x))$ avec $\lim u(x) = 0$.
- Si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a+u(x)} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{1+u(x)/a}$ avec $\lim u(x) = 0$.
- Si $a \neq 0$, $\ln(a+u(x)) = \ln\left(a\left(1+\dfrac{u(x)}{a}\right)\right) = \ln(a) + \ln\left(1+\dfrac{u(x)}{a}\right)$ avec $\lim u(x) = 0$.
- Pour $\cos(a+u(x)), \sin(a+u(x)), \operatorname{sh}(a+u(x)), \operatorname{ch}(a+u(x))$ avec $\lim u(x) = 0$, on utilisera les formules de trigonométries usuelles.

Exercice rédigé 11

Déterminer les développements limités suivants.

$f_1(x) = e^{\sin(3x)}$	à l'ordre 4	en 0	$f_2(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-2x}}$	à l'ordre 2	en 0
$f_3(x) = \dfrac{\sin(\cos(x))}{1+\operatorname{ch}(x)}$	à l'ordre 3	en 0	$f_4(x) = x^x$	à l'ordre 3	en 1

Solution :

- $f_1(x) = e^{\sin(3x)}$ *à l'ordre* 4 *en* 0.

On peut composer le DL de l'exponentielle en 0 *par celui de* $\sin(3x)$ *car* $\sin(3x)$ *tend vers* 0*. On obtient.*

$$\begin{aligned} f_1(x) = e^{\sin(3x)} &= 1 + \sin(3x) + \frac{\sin^2(3x)}{2!} + \frac{\sin^3(3x)}{3!} + \frac{\sin^4(3x)}{4!} + \underbrace{\underset{x\to 0}{o}(\sin^4(3x))}_{=o(x^4)} \\ &= 1 + \left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) + \frac{1}{2!}\left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= 1 + 3x - \frac{(3x)^3}{6} + \frac{1}{2!}\left(3x - \frac{(3x)^3}{6}\right)^2 + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient $\boxed{f_1(x) = e^{\sin(3x)} = 1 + 3x + \dfrac{9}{2}x^2 - \dfrac{81}{8}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).}$

• $f_2(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-2x}}$ *à l'ordre* 2 *en* 0.
On ne peut pas composer le DL de $\sqrt{1+u}$ *en* 0 *par celui de* $\sqrt{1-2x}$ *car* $\sqrt{1-2x}$ *ne tend pas vers* 0. *On a :*

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \sqrt{1+\sqrt{1-2x}} = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{2}(-2x)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}(-2x)^2+\underset{x\to 0}{o}\left((-2x)^2\right)\right)} \\
&= \sqrt{2-x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \quad (\textit{on factorise par } 2) \\
&= \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \quad (\textit{on peut maintenant composer les DL.}) \\
&= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)
\end{aligned}$$

Après calculs, on obtient $\boxed{f_2(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-2x}}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{5\sqrt{2}}{32}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).}$

• $f_3(x)=\dfrac{\sin(\cos(x))}{1+\mathrm{ch}(x)}$ *à l'ordre* 3 *en* 0.
On ne peut pas composer le DL de sin *en* 0 *par celui de* $\cos(x)$ *car* $\cos(x)$ *ne tend pas vers* 0. *On utilise les propriétés algébriques de* sin, *en particulier l'expression de* $\sin(a+b)$.

D'une part,

$$\begin{aligned}
\sin(\cos(x)) &= \sin\left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \sin(1)\cos\left(\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\cos(1)\sin\left(\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \sin(1)(1+\underset{x\to 0}{o}(x^3))-\cos(1)\left(\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \sin(1)-\cos(1)\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

D'autre part, on ne peut pas composer le DL de $\dfrac{1}{1+u}$ *par celui de* ch *car* $\mathrm{ch}(x)$ *ne tend pas vers* 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)} &= \frac{1}{1+1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} \quad (\textit{on factorise par } 2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) = \frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

En multipliant ces deux développement limités, on trouve :

$$\boxed{f_3(x)=\frac{\sin(\cos(x))}{1+\mathrm{ch}(x)}=\frac{\sin(1)}{2}-\left(\frac{2\cos(1)+\sin(1)}{8}\right)x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).}$$

- *$f_4(x) = x^x$ à l'ordre 3 en 1. On pose $u = x-1$ c'est-à-dire $x = u+1$.*

$$\begin{aligned} f_4(u+1) = (u+1)^{(u+1)} &= e^{(u+1)\ln(1+u)} \\ &= \exp\left((1+u)\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \underset{u\to 0}{o}(u^3)\right)\right) \\ &= \exp\left(u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \underset{u\to 0}{o}(u^3)\right) \\ &= 1 + \left(u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(u^2+u^3\right) + \frac{1}{6}u^3 + \underset{u\to 0}{o}(u^3) \end{aligned}$$

On a donc $f_4(u+1) = 1 + u + u^2 + \frac{1}{2}u^3 + \underset{u\to 0}{o}(u^3)$. En remplaçant u par $x-1$, on obtient :

$$\boxed{f_4(x) = x^x = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right).}$$

II.2 - Équivalents

Vade Mecum

Thème 6 : Développements limités et applications

On peut multiplier, élever à une puissance α fixée, substituer des équivalents.

Attention : on ne peut pas ajouter des équivalents , ni composer un équivalent par une fonction.

On pourra utiliser les développements limités, les croissances comparées ou les équivalents de référence rappelés dans le Vade Mecum.
On pourra aussi utiliser les croissances comparées et négliger des termes.
Par exemple, puisque $x^3\ln(x) = x^2.x\ln(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, on a

$$2x^2 + x^3\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2.$$

Exercice rédigé 12

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes.

$x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim}$	$x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to 1}{\sim}$	$x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to 0}{\sim}$
$\dfrac{\tan(\sin(x^2) - x^2)}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim}$	$\ln(x + \ln^2(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim}$	$\dfrac{\ln^3(x) + x^2 + 2x\sin(x)}{e^x - x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim}$
$\dfrac{\sin(x\ln(x))}{e^{\tan(x)} - \cos(x)} \underset{x\to+0}{\sim}$	$\ln(\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to 0}{\sim}$	$2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim}$

Solution :

- *On a* $\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$ *donc* $x\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2)$ *et par conséquent :* $\boxed{x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -2x^2}$

- *On a de manière évidente,* $\lim_{x\to 1} x\ln(x) - 2x^2 = -2$. *Comme cette limite est* **non nulle**, *on en déduit :*

$$\boxed{x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to 1}{\sim} -2}$$

- *On a* $x = \underset{x\to 0}{o}(\ln(x))$ *donc* $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x\ln(x))$ *et par conséquent :* $\boxed{x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)}$

- *À l'aide du développement limité de* sin *à l'ordre* 3 *en* 0*, on obtient :*

$$\sin(x^2) - x^2 = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right) - x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{6}.$$

Or $\tan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ *donc* $\tan(\sin(x^2) - x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x^2) - x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{6}$.
De plus, $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. *Et par quotient d'équivalents, on trouve :*

$$\boxed{\frac{\tan(\sin(x^2) - x^2)}{1 - \cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6/6}{x^2/2} = -\frac{x^4}{3}}$$

- *Idée à retenir :*

On factorise par le plus terme « gros » dans $(x + \ln^2(x))$*, à savoir* x.
On fait ainsi apparaître $\ln(1 + u(x))$ *avec* $u(x)$ *qui tend vers* 0.
On peut ensuite utiliser la limite, un équivalent ou un développement limité de $\ln(1+u)$ *quand* $u \to 0$.

$$\forall x > 0, \quad \ln(x + \ln^2(x)) = \ln\left(x\left(1 + \frac{\ln^2(x)}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{\ln^2(x)}{x}\right).$$

Quand $x \to 0^+$*, le second terme qui tend vers* 0 *est négligeable devant le premier qui tend vers* $-\infty$. *Ainsi :*

$$\boxed{\ln(x + \ln^2(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)}$$

- *On a* $\ln^3(x) + 2x\sin(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2)$ *donc* $\ln^3(x) + x^2 + 2x\sin(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.
Et aussi, par croissances comparées, $x^3 = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$ *donc* $e^x - x^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.
Et par quotient d'équivalents, on trouve : $\boxed{\frac{\ln^3(x) + x^2 + 2x\sin(x)}{e^x - x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 e^{-x}}$

- *D'une part,* $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ *(limite du cours) et* $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. *Donc :* $\sin(x\ln(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$.
D'autre part, en utilisant les développements limités du cours, on trouve :

$$\begin{aligned} e^{\tan(x)} - \cos(x) &= \left(1 + \tan(x) + \frac{\tan^2(x)}{2} + \underbrace{\underset{x\to 0}{o}(\tan^2(x))}_{= \underset{x\to 0}{o}(x^2)}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= \underbrace{\tan(x)}_{\underset{x\to 0}{\sim} x} + \underbrace{\frac{\tan^2(x)}{2} + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{= \underset{x\to 0}{o}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x \end{aligned}$$

Et par quotient d'équivalents, on obtient : $\boxed{\dfrac{\sin(x\ln(x))}{e^{\tan(x)}-\cos(x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)}$

- *On a* $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ch}(x)-1)=0$ *et* $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim} u$ *donc :*

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) = \ln(1+(\operatorname{ch}(x)-1)) \underset{x\to 0}{\sim} \operatorname{ch}(x)-1.$$

Et à l'aide du développement limité à l'ordre 2 en 0 de ch, on obtient (deuxième équivalent à connaître) :

$$\boxed{\ln(\operatorname{ch}(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \operatorname{ch}(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}}$$

- *On factorise par x (le plus gros terme) sous les deux premières racines, il apparaît ainsi des expressions de la forme* $\sqrt{1+u(x)}$ *avec* $u(x)$ *qui tend vers* 0*. On peut alors utiliser les développements limités du cours.*

$$2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x} \;=\; \sqrt{x}\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)$$

Or $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} = 1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *et* $\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = 1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$*. Ainsi :*

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1 &= 2\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}\right)-\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)-1+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{4x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \end{aligned}$$

En multipliant par $\sqrt{x}$*, on obtient :*

$$\boxed{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4x\sqrt{x}}}$$

II.3 - Limites

Vade Mecum

Thème 6 : Développements limités et application

Pour calculer des limites, on utilisera les outils précédents. On peut aussi utiliser le théorème d'encadrement. Par exemple, pour tout $x\neq 0$, on a $\left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq x$,

donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Attention aux expressions du type $a(x)^{b(x)}$! Si la variable est dans l'exposant, que ce soit pour trouver un ensemble de définition, pour dériver ou pour déterminer une limite, on **doit** repasser à la forme exponentielle.

$$\text{si} \quad a(x)>0 \quad \text{alors} \quad a(x)^{b(x)} = e^{b(x)\ln(a(x))}.$$

Ainsi, « 0^0 » et « 1^∞ » sont des formes indeterminées. On **retiendra** les exemples simples suivants.

Exercice rédigé 13

Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)}$$

Solution : *On a* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{1}$.
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n^2\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{n+\underset{n\to+\infty}{o}(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}=e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{-n^2\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{-n+\underset{n\to+\infty}{o}(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)}=e^{\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{\frac{\ln(n)}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{0}=1$.

II.4 - Suites récurrentes d'ordre 2

Vade Mecum

Thème 8 : Suites numériques remarquables

Exercice rédigé 14

Déterminer u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants.

1. $u_0=1, u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=6u_{n+1}-8u_n$.
2. $u_0=1, u_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$.
3. $u_0=0, u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=-2u_{n+1}-4u_n$.

Solution :

1. $u_0=1, u_1=1$ *et* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=6u_{n+1}-8u_n$.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. *Son équation caractéristique associée est*

$$r^2-6r+8=(r-2)(r-4)=0.$$

Par conséquent, il existe des constantes A, B *réelles telles que* $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=A.2^n+B.4^n$. *Or,* $u_0=1=A+B$ *et* $u_1=1=2A+4B$ *donc* $A=\frac{3}{2}$ *et* $B=-\frac{1}{2}$ *et finalement*

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\frac{1}{2}\left(3.2^n-4^n\right).}$$

2. $u_0=1, u_1=0$ *et* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. *Son équation caractéristique associée est*

$$r^2-6r+9=(r-3)^2=0.$$

Par conséquent, il existe des constantes A, B réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An+B)3^n$.
Or, $u_0 = 1 = B$ *et* $u_1 = 0 = 3(A+B)$ *donc* $A = -1$ *et finalement*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (1-n)3^n.}$$

3. $u_0 = 0, u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.
Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est

$$r^2 + 2r + 4 = 0.$$

Les racines sont $-1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm 2i\pi/3}$. *Par conséquent, il existe des constantes A, B réelles telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n \left(A\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right).$$

Or, $u_0 = 0 = A$ *et* $u_1 = 1 = 2B\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ *donc* $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *et finalement :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).}$$

II.5 - Suites arithmético-géométriques

Vade Mecum

Thème 8 : Suites numériques remarquables

Exercice rédigé 15

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1.$$

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ce type de suite est appelé suite arithmético-géométrique.

Solution :

1. *On détermine d'abord les suites constantes ℓ solution. Si $u_n = \ell$, on a*

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{3}{4}\ell - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = -4.$$

Soit maintenant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell = u_n + 4$.

Puisque $\ell = \frac{3}{4}\ell - 1$, *on a*

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1 \iff u_{n+1} - \ell = \frac{3}{4}u_n - 1 - \ell = \frac{3}{4}u_n - 1 - \left(\frac{3}{4}\ell - 1\right) = \frac{3}{4}(u_n - \ell)$$

$$\iff v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$$

On reconnaît une suite géométrique.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ *et donc* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 + 4) - 4.}$

2. Enfin, puisque $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$, *on a* $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ *et donc* $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell = -4.}$

II.6 - Séries géométriques

Vade Mecum

Thème 9, Paragraphe 9.1 : Séries géométriques

Exercice rédigé 16

Après avoir justifié leur existence, expliciter les sommes suivantes.

1. $S_1(n) = \sum_{k=3}^{n+1} a^k$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. $S_2 = \sum_{k=5}^{+\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1}$.
3. $S_3(n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.
4. $S_4(n) = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $S_5 = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Solution :

1. $S_1(n) = \sum_{k=3}^{n+1} a^k$ *existe bien car il s'agit d'une somme finie de termes.*

- $\boxed{\textit{Si } a \neq 1 \textit{ :}}$

$$S_1(n) = \sum_{k=3}^{n+1} a^k = a^3(1 + a + \cdots + a^{n-2}) = a^3 \sum_{k=0}^{n-2} a^k = a^3 \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a}.$$

- $\boxed{\textit{Si } a = 1 \textit{ :}}$

$$S_1(n) = \sum_{k=3}^{n+1} 1 = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n+1-2 \text{ termes}} = n - 1.$$

2. *Il s'agit de la somme d'une série géométrique convergente puisque sa raison* $q = \dfrac{-2}{3}$ *vérifie* $|q| < 1$.

   On calcule cette somme en factorisant par le premier terme $\left(\dfrac{-2}{3}\right)^4$.

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=5}^{+\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{-2}{3}\right)^4 + \left(\frac{-2}{3}\right)^5 + \cdots \\ &= \left(\frac{-2}{3}\right)^4 \left(1 + \left(\frac{-2}{3}\right) + \cdots \right) = \left(\frac{-2}{3}\right)^4 \frac{1}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{16}{5.3^3} \end{aligned}$$

3. *Il s'agit de la somme (ou plus précisément d'un reste partiel) d'une série géométrique convergente puisque sa raison* $q = \dfrac{1}{4}$ *vérifie* $|q| < 1$.

   On calcule cette somme en factorisant par le premier terme $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(1 + \left(\frac{1}{4}\right) + \cdots \right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{3.4^{n-1}} \end{aligned}$$

4. *On dérive* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ *(fonction polynomiale) sur* $]-1,1[$*, puis on évalue en* $x = \dfrac{1}{2}$.

   Pour tout $x \in]-1,1[$*, on a* $x \neq 1$ *et donc :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

   Par opérations sur les fonctions dérivables, f *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et on a :*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n}{1-x} + \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

   Et donc, en $x = \dfrac{1}{2}$*, on obtient :* $S_4(n) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = -2(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   Enfin, lorsque n *tend vers* $+\infty$*, par croissances comparées, on trouve :*

$$S_5 = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \lim_{n\to+\infty} S_4(n) = 4.$$

Exercice rédigé 17

1. Déterminer l'ensemble D des $t \in \mathbb{R}$ tels que $\sum \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$ converge.
2. Démontrer que pour tout $t \in D$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}.$$

Solution :

1. *Pour* $t \in \mathbb{R}$, *il s'agit d'une série géométrique de raison* $q = \dfrac{1+t^2}{2} \geq 0$.
   Ainsi, on a les équivalences suivantes.

$$\sum \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \text{ converge} \iff \frac{1+t^2}{2} < 1$$

$$\iff 1+t^2 < 2 \iff t^2 < 1$$

$$\boxed{\sum \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \text{ converge} \iff t \in D =]-1,1[.}$$

2. *Pour tout* $t \in D =]-1,1[$, *on a les égalités suivantes.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{1+t^2}{2}\right)} = \frac{2}{2-(1+t^2)}$$

$$= \frac{2}{1-t^2} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \quad \text{car } |t^2| < 1$$