PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 9

du 25 au 29 novembre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 et 14.

Éléments propres, polynôme caractéristique, diagonalisation : révisions

Trigonalisation :

1. Définition : $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ et trigonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire.
2. CNS de trigonalisabilité (admise) : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.
3. Conséquences :
   - Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
   - La trace de A est la somme de ses valeurs propres (répétées avec multiplicité) et le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (répétées avec multiplicité).
   - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n) = \lambda^n - \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$

Diagonalisation et polynômes annulateurs :

1. Définition d'un polynôme annulateur et premiers exemples.
2. Lien avec les valeurs propres : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ alors
   - Si $P(A) = 0$ alors : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Longrightarrow P(\lambda) = 0$ **(D1)**
   - Plus généralement : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Longrightarrow P(\lambda) \in \operatorname{Sp}(P(A))$.

   Énoncé analogue pour les endomorphismes.
3. Théorème de Cayley-Hamilton.
4. Secondes CNS de diagonalisabilité : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence entre :
   (1) u est diagonalisable (il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale)
   (2) Le polynôme scindé à racines simples $P_0 = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u.
   (3) Il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u.
5. Conséquence : si u est diagonalisable, ses endomorphismes induits le sont aussi **(D2)**.

Applications de la réduction :

1. Calcul des puissances de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: soit à partir de la réduction, soit à partir d'un polynôme annulateur.
2. Résolution de systèmes différentiels (seul un cas diagonalisable a été vu en cours).
3. Résolution d'équations matricielles (exemples : recherche de commutants, recherche de racines de matrices)

Suites et séries numériques : révisions

Pour ce qui suit, uniquement des questions de cours (énoncés, (D) et (E)).

Suites et séries de fonctions :

1. Différents types de convergence :
   (a) Convergence simple (conservation de la monotonie, de la convexité par limite simple)
   (b) Norme infinie d'une fonction bornée sur un intervalle I (définition, démonstration **(D2)**).
   Le nouveau programme autorise d'écrire directement $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ *pour* $A \subset \mathbb{R}$ *et* $\lambda \geq 0$.
   (c) Convergence uniforme, et convergence normale pour les séries de fonctions.
   (d) Procédés d'étude. Liens entre ces différentes notions. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout x.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 11$.
Calculer le polynôme caractéristique de A.

(E1) : Diagonaliser la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux-à-deux équivalentes.

1. A est nilpotente
2. $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$
3. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$
4. $A^n = 0$

(E1) : Application : calcul de puissances de matrices (en utilisant la réduction ou à l'aide d'un polynôme annulateur)

(E1) : On pose $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformement sur $[0,1]$.

(E1) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergence uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On pourra utiliser la formule de Stirling.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$.
Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, A]$ puis sur $\mathbb{R}^+$.

Niveau 2 :

(E2) : Savoir trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qui a deux valeurs propres).

(E2) : Application : recherche de commutants.

(E2) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$ et $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k}$.

- Etudier la convergence simple de $\sum f_n$.
- Démontrer que pour tout $a \in]0,1[$, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
- Démontrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

(E2) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{n^2 + x^2}$.
Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur un segment $[0, A] \subset \mathbb{R}^+$.
Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

Niveau 3 :

(E3) : Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors u et v diagonalisent dans une même base.

Remarques : « les endomorphismes induits d'un endomorphisme diagonalisable sont diagonalisables » est un résultat de cours.

(E3) : Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des scalaires distincts et $n_1, \ldots, n_q$ des entiers naturels non nul.

On note $n = n_1 + \cdots + n_q$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_q I_{n_q} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer $\mathrm{Com}(A)$.

Semaine 10 : Applications de la réduction + Suites et séries de fonctions.