PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 8

du 18 au 22 novembre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 et 14.

Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice :

1. Sous espaces stables, endomorphismes induits, si $u \circ v = v \circ u$ alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v **(D1)**, droites stables (pour $x \neq 0$, on a $D = \mathrm{vect}\{x\}$ est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ **(D2)**).
2. Valeurs propres, spectre, sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $E_\lambda(A)$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ E_\lambda(u)$ est stable par v.
4. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres distinctes de u alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe **(D2)**.
5. Conséquence : Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
6. En dimension finie, lien entre les éléments propres de f et ceux de sa matrice dans une base.
7. Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres mais la réciproque est fausse.
8. Exemples : éléments propres d'un projecteur ou d'une symétrie.

Polynôme caractéristique :

1. Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n)$. C'est un polynôme unitaire et de degré n (admis dans un premier temps).
2. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
3. Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) sont les racines de son polynôme caractéristique. Conséquences :
   - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres distinctes.
   - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.
4. Multiplicité : définition, propriété : $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$. **(D2)** dans le cas d'un endomorphisme.
   Le sous-espace propre asocié à une valeur propre simple est une droite vectorielle.

Diagonalisation :

1. Définition : $u \in \mathcal{L}(E)$ et diagonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ soit diagonale.
   $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
2. Premier exemple (CS de diagonalisabilité) : Si $\dim(E) = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ on a
$$\begin{aligned} \chi_u \text{ est scindé à racines simples} &\implies u \text{ est diagonalisable.} \\ u \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes} &\implies u \text{ est diagonalisable.} \end{aligned}$$
3. CNS de diagonalisabilité : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence entre :
   (1) u est diagonalisable (il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ est diagonale)
   (2) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u.
   (3) $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.
   (4) $\dim(E) = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$.
   (5) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$.
4. Résultats analogues pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Trigonalisation :

1. Définition : $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ et trigonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire.
2. CNS de trigonalisabilité (admise) : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.
3. Conséquences :
   - Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
   - La trace de A est la somme de ses valeurs propres (répétées avec multiplicité) et le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (répétées avec multiplicité).
   - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n) = \lambda^n - \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$

Diagonalisation et polynômes annulateurs :

1. Définition d'un polynôme annulateur et premiers exemples.
2. Lien avec les valeurs propres : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ alors
   - Si $P(A) = 0$ alors : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Longrightarrow P(\lambda) = 0$ **(D1)**
   - Plus généralement : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Longrightarrow P(\lambda) \in \operatorname{Sp}(P(A))$.

   Énoncé analogue pour les endomorphismes.
3. Théorème de Cayley-Hamilton.
4. Secondes CNS de diagonalisabilité : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence entre :
   (1) u est diagonalisable (il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale)
   (2) Le polynôme scindé à racines simples $P_0 = \displaystyle\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u.
   (3) Il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u.
5. Conséquence : si u est diagonalisable, ses endomorphismes induits le sont aussi **(D2)**.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que si f est de rang 1, alors il possède au moins une valeur propre.
- Montrer que si $x \in E$ est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \mathrm{Im}(f)$.

(E1) : Savoir diagonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 11$.
Calculer le polynôme caractéristique de A.

(E1) : Diagonaliser la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux-à-deux équivalentes.

1. A est nilpotente
2. $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$
3. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$
4. $A^n = 0$

Niveau 2 :

(E2) : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme D de E défini par : $\forall f \in E, \quad D(f) = f'$.

(E2) : Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de $u \circ v$ alors elle est aussi valeur propre de $v \circ u$.
Montrer que cette propriété persiste pour $\lambda = 0$ quand E est de dimension finie.

(E2) : Savoir trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qui a deux valeurs propres).

Niveau 3 :

(E3) : Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors u et v diagonalisent dans une même base.

Remarques : « les endomorphismes induits d'un endomorphisme diagonalisable sont diagonalisables » est un résultat de cours.

Semaine 9 : Réduction et application + Suites et séries de fonctions (début).