PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 7

du 12 au 15 novembre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 et 14.

Espaces vectoriels, familles de vecteurs, applications linéaires : révisions

Calcul Matriciel (rappels et compléments) :

1. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, produit matriciel, inverse (définition et caractérisations), puissances de matrices (formule du binôme de Newton).
2. Polynômes de matrices, relation $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$, polynôme annulateur, deux polynômes d'un même endomorphisme A commutent.
3. Matrice de vecteurs, matrice de passage, matrice d'applications linéaires. Formules de changement de bases. Matrice de l'inverse, de la composée.
4. Recherche pratique de noyaux et d'images en petites dimensions.
5. Matrices semblables.
6. Application trace :
   (a) Définition de la trace d'une matrice, linéarité.
   (b) Propriété fondamentale : $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ **(D1)**.
   (c) Trace d'un endomorphisme.

Déterminants :

1. Applications p-linéaires :
   (a) Définitions, formes p-linéaires alternées, antisymétriques. Equivalence entre alternée et antisymétrique.
   (b) Effet des opérations élémentaires, image d'une famille liée.
   (c) Si E est de dimension n, l'ensemble des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle (admis).
2. Déterminant de n vecteurs dans une base :
   (a) Définition : c'est l'unique forme n-linéaire, alternée qui vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. Notation.
   (b) Lien entre $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$.
   (c) Caractérisation des bases.
3. Déterminant d'une matrice carrée :
   (a) Définition, règle de Sarrus.
   (b) Critère d'inversibilité.
   (c) Propriétés algébriques.
   (d) Effet des transformations élémentaires.
   (e) Développement par rapport à une ligne ou une colonne (admis).
4. Déterminant d'un endomorphisme (définition, propriétés)
5. Déterminant de Vandermonde **(D2)**
6. Déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice triangulaire par blocs.

Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice :

1. Sous espaces stables, endomorphismes induits, si $u \circ v = v \circ u$ alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v **(D1)**, droites stables (pour $x \neq 0$, on a $D = \mathrm{vect}\{x\}$ est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ **(D2)**).
2. Valeurs propres, spectre, sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $E_\lambda(A)$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.
4. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des valeurs propres distinctes de u alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe **(D2)**.
5. Conséquence : Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
6. En dimension finie, lien entre les éléments propres de f et ceux de sa matrice dans une base.
7. Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres mais la réciproque est fausse.
8. Exemples : éléments propres d'un projecteur ou d'une symétrie.

Polynôme caractéristique :

1. Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n)$. C'est un polynôme unitaire et de degré n (admis dans un premier temps).
2. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
3. Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) sont les racines de son polynôme caractéristique. Conséquences :
   - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres distinctes.
   - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.
4. Multiplicité : définition, propriété : $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$. **(D2)** dans le cas d'un endomorphisme.
   Le sous-espace propre asocié à une valeur propre simple est une droite vectorielle.

Diagonalisation :

1. Définition : $u \in \mathcal{L}(E)$ et diagonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ soit diagonale.
   $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
2. Premier exemple (CS de diagonalisabilité) : Si $\dim(E) = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ on a
$$\begin{array}{rcl} \chi_u \text{ est scindé à racines simples} & \Longrightarrow & u \text{ est diagonalisable.} \\ u \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes} & \Longrightarrow & u \text{ est diagonalisable.} \end{array}$$
3. CNS de diagonalisabilité : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence entre :
   (1) u est diagonalisable (il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ est diagonale)
   (2) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u.
   (3) $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.
   (4) $\dim(E) = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$.
   (5) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$.
4. Résultats analogues pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Savoir trouver une base du noyau, une base de l'image d'une matrice 3×3 sans hésitation.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^n.

(E1) : On suppose que $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$.

(E1) : Calculer le déterminant d'ordre n suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

(E1) : Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad f(M) = 2M +^t M.$$

(E1) : Démontrer rapidement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(E1) : On note $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Démontrer les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!],\ \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad AU = U \\ &\Longleftrightarrow \quad U \in \operatorname{Ker}(A - I_n) \end{aligned}$$

2. En déduire que l'ensemble des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

(E1) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrer que si f est de rang 1, alors il possède au moins une valeur propre.
- Montrer que si $x \in E$ est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \operatorname{Im}(f)$.

(E1) : Savoir diagonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Niveau 2 :

(E2) : (sans le déterminant) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A n'est pas inversible, alors M ne l'est pas non plus.
2. Montrer que si A est inversible, alors M l'est aussi et dans ce cas, déterminer M^{-1}.

(E2) : 1. Donner une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sans démonstration). En déduire leurs dimensions respectives.

2. Déterminer le déterminant et la trace de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = 2M + M^T$.

(E2) : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme D de E défini par : $\forall f \in E, \quad D(f) = f'$.

(E2) : Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de $u \circ v$ alors elle est aussi valeur propre de $v \circ u$.
Montrer que cette propriété persiste pour $\lambda = 0$ quand E est de dimension finie.

Niveau 3 :

(E3) : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

(E3) : Énoncer et démontrer les formules de Cramer.

(E3) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Com}(A)$ la matrice de ses cofacteurs, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Démontrer que $\mathrm{Com}(A)^T.A = A.\mathrm{Com}(A)^T = \det(A).I_n$ (1 seule des 2 égalités).

Semaine 8 : Réduction