PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 6

du 4 au 8 novembre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11 et 12.

Espaces vectoriels :

1. Définition, exemples, s.e.v.
2. Produit d'espaces vectoriels (en nombre fini).
3. Sommes de n s.e.v.
   - la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.
     (i) Pour toutes familles $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, on a :
     $$u_1 + \ldots + u_n = v_1 + \ldots + v_n \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_i = v_i.$$
     (ii) Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, on a :
     $$u_1 + \ldots + u_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_i = 0.$$
   - Cas de deux s.e.v : $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ **(D1)**.
   - Famille finie de sous-espaces supplémentaires.

Familles de vecteurs

1. Famille génératrice **finie**, famille libre **finie**, base (exemples). Unicité de la décomposition dans une base.
2. Espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice finie on peut extraire une base, théorème de la base incomplète, existence de base dans un espace vectoriel de dimension finie.
3. Dimension (cardinal d'une base), cardinal d'une famille libre, cardinal d'une famille génératrice, équivalence entre libre, génératrice et base quand la famille est de cardinal $\dim(E)$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel :

1. Si F sev de E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. Cas d'égalité.
2. Base adaptée à $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$, dimension de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
3. Existence de supplémentaire d'un espace vectoriel de dimension finie (admis dans le cas où E n'est pas de dimension finie).
4. Dimension de $F + G$.
5. Si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, alors on a $E = F \oplus G \Longleftrightarrow F \cap G = \{0\} \Longleftrightarrow E = F + G$.
6. Dimension du produit d'espaces vectoriels de dimension finie.

Applications linéaires :

1. Définition de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, endomorphisme, forme linéaire, isomorphisme, automorphisme, noyau (lien avec l'injectivité), image (lien avec la surjectivité)
2. Bases et applications linéaires : une application linéaire est complétement définie par l'image d'une base. Soient E un $\mathbb{K}-$e.v. de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, F un $\mathbb{K}-$e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
   (b) f est surjective $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F,
   (c) f est injective $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F,
   (d) f est un isomorphisme $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

3. Rang d'une application linéaire :
   - Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ (quand elles ont un sens), cas d'égalité.
   - $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)\}$, conservation du rang par composition par un isomorphisme à gauche ou à droite **(D3)**.
   - Si $G \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ alors la restriction de f à G définit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(f)$ et formule du rang **(D2)**.
4. Caractérisation des isomorphismes : si E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels même dimension $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a
$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est un isomorphisme } \iff \mathrm{rg}(f) = n.$$
5. Polynômes d'endomorphismes, relation $(PQ)(u) = P(u)Q(u)$, polynôme annulateur, deux polynômes d'un même endomorphisme u commutent, le noyau de $P(u)$ est stable par u.

Endomorphismes particuliers :

1. Projecteurs ou projection (définition géométrique), caractérisation par $p \circ p = p$.
   Égalité $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ (même quand E n'est pas de dimension finie).
   Matrice d'un projecteur dans une bonne base.
2. Symétries (définition géométrique), caractérisation par $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Égalité $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ (même quand E n'est pas de dimension finie).
   Matrice d'une symétrie dans une bonne base.

Hyperplans :

1. Définition : Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
2. F est un hyperplan si et seulement si il admet une droite vectorielle pour supplémentaire dans E.
3. En dimension finie : F est un hyperplan si et seulement si il est de dimension $n-1$.
   Équation cartésienne d'un hyperplan.

Polynômes de Lagrange :

1. Isomorphisme $\varphi : \ P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto \Big(P(a_0), \dots, P(a_n)\Big) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts **(D1)**.
2. Base de Lagrange $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ (expression, lien avec φ), expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base, expression de $L_0 + \cdots + L_n$.

Calcul Matriciel (rappels et compléments) :

1. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, produit matriciel, inverse (définition et caractérisations), puissances de matrices (formule du binôme de Newton).
2. Polynômes de matrices, relation $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$, polynôme annulateur, deux polynômes d'un même endomorphisme A commutent.
3. Matrice de vecteurs, matrice de passage, matrice d'applications linéaires. Formules de changement de bases. Matrice de l'inverse, de la composée.
4. Recherche pratique de noyaux et d'images en petites dimensions.
5. Matrices semblables.
6. Application trace :
   (a) Définition de la trace d'une matrice, linéarité.
   (b) Propriété fondamentale : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ **(D1)**.
   (c) Trace d'un endomorphisme.

Déterminants :

1. Applications p-linéaires :
   (a) Définitions, formes p-linéaires alternées, antisymétriques. Equivalence entre alternée et antisymétrique.
   (b) Effet des opérations élémentaires, image d'une famille liée.
   (c) Si E est de dimension n, l'ensemble des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle (admis).
2. Déterminant de n vecteurs dans une base :
   (a) Définition : c'est l'unique forme n-linéaire, alternée qui vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. Notation.
   (b) Lien entre $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$.
   (c) Caractérisation des bases.
3. Déterminant d'une matrice carrée :
   (a) Définition, règle de Sarrus.
   (b) Critère d'inversibilité.
   (c) Propriétés algébriques.
   (d) Effet des transformations élémentaires.
   (e) Développement par rapport à une ligne ou une colonne (admis).
4. Déterminant d'un endomorphisme (définition, propriétés)
5. Déterminant de Vandermonde **(D2)**
6. Déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice triangulaire par blocs.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Montrer que le sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions paires et le sous-espace $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont supplémentaires dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(E1) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $f_i : x \longmapsto e^{\alpha_i x}$.
Montrer que $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(E1) : Savoir trouver la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

(E1) : Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts et $\mathcal{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ la base de Lagrange associée à $a_0, \ldots, a_n$.

1. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
2. Reconnaitre $L_0(X) + \cdots + L_n(X)$ et $a_0 L_0(X) + \cdots + a_n L_n(X)$

(E1) : Savoir trouver une base du noyau, une base de l'image d'une matrice 3×3 sans hésitation.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^n.

(E1) : On suppose que $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.
Démontrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$.

(E1) : Calculer le déterminant d'ordre n suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

(E1) : Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad f(M) = 2M + {}^t M.$$

(E1) : Démontrer rapidement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(E1) : On note $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Démontrer les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1,n]\!],\ \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad AU = U \\ &\Longleftrightarrow \quad U \in \mathrm{Ker}(A - I_n) \end{aligned}$$

2. En déduire que l'ensemble des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

Niveau 2 :

(E2) : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$. Montrer que $P.\mathbb{K}[X]$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ puis que $P.\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

(E2) : Soit E un$\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u^n comme combinaison linéaire de u et de Id_E.

(E2) : (sans le déterminant) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A n'est pas inversible, alors M ne l'est pas non plus.
2. Montrer que si A est inversible, alors M l'est aussi et dans ce cas, déterminer M^{-1}.

(E2) : 1. Donner une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sans démonstration). En déduire leurs dimensions respectives.

2. Déterminer le déterminant et la trace de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = 2M + M^T$.

Niveau 3 :

(E3) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $E_1, \dots, E_n$ des s.e.v. de E. On a l'équivalence suivante.

$$\text{La somme } E_1 + \cdots + E_n \text{ est directe} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1,\dots,n\},\ E_i \cap \left(\sum_{j\neq i} E_j\right) = \{0\}.$$

(E3) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'implication suivante.

$$\Big(\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \underbrace{\forall x \in E, u(x) = \lambda x}_{\text{i.e } u=\lambda \mathrm{Id}_E}\Big)$$

(E3) : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |a_{i,j}|$$

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

(E3) : Énoncer et démontrer les formules de Cramer.

(E3) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Com}(A)$ la matrice de ses cofacteurs, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
Démontrer que $\mathrm{Com}(A)^T.A = A.\mathrm{Com}(A)^T = \det(A).I_n$ (1 seule des 2 égalités).

Semaine 7 : Révisions d'algèbre linéaire + Calcul matriciel + Déteminant + Réduction (début)