PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 5

du 14 au 18 octobre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11 et 12.

Intégrales impropres, fonctions intégrables : Révisions

Intégrales dépendant d'un paramètre :

1. Cas où le paramètre est dans les bornes (y compris pour des intégrales impropres).
2. Théorème de continuité sous le signe $\int$ **(Admis)**. Cas où l'on doit restreindre l'hypothèse de domination.
3. Théorème de convergence dominée à paramètre continu **(Admis)**.
4. Théorème de dérivabilité ($\mathcal{C}^1$) sous le signe $\int$ **(Admis)**. Formule de Leibniz. Cas où l'on doit restreindre l'hypothèse de domination.
5. Dérivées d'ordres supérieurs.

Espaces vectoriels :

1. Définition, exemples, s.e.v.
2. Produit d'espaces vectoriels (en nombre fini).
3. Sommes de n s.e.v.
   - la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.
     (i) Pour toutes familles $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, on a :
     $$u_1 + \ldots + u_n = v_1 + \ldots + v_n \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_i = v_i.$$
     (ii) Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, on a :
     $$u_1 + \ldots + u_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_i = 0.$$
   - Cas de deux s.e.v : $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ **(D1)**.
   - Famille finie de sous-espaces supplémentaires.

Familles de vecteurs

1. Famille génératrice **finie**, famille libre **finie**, base (exemples). Unicité de la décomposition dans une base.
2. Espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice finie on peut extraire une base, théorème de la base incomplète, existence de base dans un espace vectoriel de dimension finie.
3. Dimension (cardinal d'une base), cardinal d'une famille libre, cardinal d'une famille génératrice, équivalence entre libre, génératrice et base quand la famille est de cardinal $\dim(E)$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel :

1. Si F sev de E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. Cas d'égalité.
2. Base adaptée à $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$, dimension de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
3. Existence de supplémentaire d'un espace vectoriel de dimension finie (admis dans le cas où E n'est pas de dimension finie).
4. Dimension de $F + G$.
5. Si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, alors on a $E = F \oplus G \Longleftrightarrow F \cap G = \{0\} \Longleftrightarrow E = F + G$.
6. Dimension du produit d'espaces vectoriels de dimension finie.

Applications linéaires :

1. Définition de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, endomorphisme, forme linéaire, isomorphisme, automorphisme, noyau (lien avec l'injectivité), image (lien avec la surjectivité)
2. Bases et applications linéaires : une application linéaire est complétement définie par l'image d'une base. Soient E un $\mathbb{K}-$e.v. de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, F un $\mathbb{K}-$e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
   (b) f est surjective $\Longleftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F,
   (c) f est injective $\Longleftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F,
   (d) f est un isomorphisme $\Longleftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.
3. Rang d'une application linéaire :
   - Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ (quand elles ont un sens), cas d'égalité.
   - $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)\}$, conservation du rang par composition par un isomorphisme à gauche ou à droite **(D3)**.
   - Si $G \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ alors la restriction de f à G définit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(f)$ et formule du rang **(D2)**.
4. Caractérisation des isomorphismes : si E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels même dimension $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow f \text{ est un isomorphisme } \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n.$$

5. Polynômes d'endomorphismes, relation $(PQ)(u) = P(u)Q(u)$, polynôme annulateur, deux polynômes d'un même endomorphisme u commutent, le noyau de $P(u)$ est stable par u.

Endomorphismes particuliers :

1. Projecteurs ou projection (définition géométrique), caractérisation par $p \circ p = p$.
   Égalité $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ (même quand E n'est pas de dimension finie).
   Matrice d'un projecteur dans une bonne base.
2. Symétries (définition géométrique), caractérisation par $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Égalité $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ (même quand E n'est pas de dimension finie).
   Matrice d'une symétrie dans une bonne base.

Hyperplans :

1. Définition : Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
2. F est un hyperplan si et seulement si il admet une droite vectorielle pour supplémentaire dans E.
3. En dimension finie : F est un hyperplan si et seulement si il est de dimension $n - 1$.
   Équation cartésienne d'un hyperplan.

Polynômes de Lagrange :

1. Isomorphisme $\varphi :\ P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto \Big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\Big) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts **(D1)**.
2. Base de Lagrange $\mathcal{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ (expression, lien avec φ), expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base, expression de $L_0 + \cdots + L_n$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et démontrer que Γ est strictement positive.

(E1) : Soit $f : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ lorsque (et/ou au choix de l'examinateur) :

1. f est bornée.
2. f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On justifiera l'existence de l'intégrale.

(E1) : Montrer que le sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions paires et le sous-espace $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont supplémentaires dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(E1) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $f_i : x \longmapsto e^{\alpha_i x}$.
Montrer que $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(E1) : Savoir trouver la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

(E1) : Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts et $\mathcal{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ la base de Lagrange associée à $a_0, \ldots, a_n$.

1. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
2. Reconnaitre $L_0(X) + \cdots + L_n(X)$ et $a_0L_0(X) + \cdots + a_nL_n(X)$

Niveau 2 :

(E2) : Démontrer que la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0 + \infty[$.

(E2) : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$. Montrer que $P.\mathbb{K}[X]$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ puis que $P.\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

(E2) : Soit E un$\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u^n comme combinaison linéaire de u et de Id_E.

Niveau 3 :

(E3) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{1+t}dt$.
Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$? Déterminer de deux façons un équivalent u_n quand n tend vers $+\infty$.

(E3) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $E_1, \ldots, E_n$ des s.e.v. de E. On a l'équivalence suivante.

$$\text{La somme } E_1 + \cdots + E_n \text{ est directe} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ E_i \cap \left(\sum_{j\neq i} E_j\right) = \{0\}.$$

(E3) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'implication suivante.

$$\Big(\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \underbrace{\forall x \in E, u(x) = \lambda x}_{\text{i.e } u=\lambda \mathrm{Id}_E}\Big)$$

Semaine 6 : Révisions d'algèbre linéaire + Calcul matriciel + Déteminant.