Programme de Colles

Semaine 4

du 7 au 1 octobre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8 et 9.

Convergence des intégrales impropres (ou généralisées) :

1. Intégrale impropre sur $]a, b]$ ou sur $[a, b[$. Convergence, divergence, exemples.
2. Intégrale faussement impropre (i.e cas où la fonction intégrée est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$).
3. Intégrales de références : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$.
4. Intégrale impropre sur $]a, b[$.
5. Propriétés : linéarité, relation de Chasles.
6. Précautions de calculs :
   • intégration par parties : on revient sur un segment ou on travaille directement avec l'intégrale impropre en précisant soigneusement l'existence des limites.
   • changement de variable : on se ramène sur un segment puis on passe à la limite ou on utilise le théorème de changement de variable pour une intégrale impropre (φ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone).
7. Intégrales à valeurs dans $\mathbb{C}$: $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge $\iff \displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt$ convergent.

Intégrales de fonctions positives :

1. Monotonie, si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et positive, alors $F : X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(t)dt$ est croissante.
   Deux cas possibles : F majorée ou $\displaystyle\lim_{X\to b} F(X) = +\infty$.
2. Théorèmes de comparaisons : Comparaison de la nature de $\displaystyle\int f$ et de $\displaystyle\int g$ dans les cas $f \leq g$ (et donc $f = o(g)$), $f = O(g)$ et $f \sim g$. Cas de convergence et de divergence.
3. Intégrale impropre absolument convergente. Absolument convergente $\Longrightarrow$ Convergente.
   Mais la réciproque est fausse. Intégrale semi-convergente.

Fonctions intégrables :

1. Fonctions intégrables (contient le caractère continu par morceaux), notation $\displaystyle\int_I f(t)dt$.
2. Adaptation des théorèmes de comparaisons.
3. Propriétés :
   - Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
   - Si f est intégrable sur I, alors elle l'est sur tout intervalle $J \subset I$.
   - Si f est **continue**, positive et intégrable sur I on a $\displaystyle\int_I f(t)dt = 0 \implies \forall t \in I,\ f(t) = 0$.

Intégrales dépendant d'un paramètre :

1. Cas où le paramètre est dans les bornes (y compris pour des intégrales impropres).
2. Théorème de continuité sous le signe $\int$ **(Admis)**. Cas où l'on doit restreindre l'hypothèse de domination.
3. Théorème de convergence dominée à paramètre continu **(Admis)**.
4. Théorème de dérivabilité ($\mathcal{C}^1$) sous le signe $\int$ **(Admis)**. Formule de Leibniz. Cas où l'on doit restreindre l'hypothèse de domination.
5. Dérivées d'ordres supérieurs.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

(E1) : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge, puis la calculer.

(E1) : Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ est convergente, puis à l'aide d'un changement de variable, qu'elle vaut 0.

(E1) : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

(E1) : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et démontrer que Γ est strictement positive.

(E1) : Soit $f : [0,+\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ lorsque (et/ou au choix de l'examinateur) :
1. f est bornée.
2. f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On justifiera l'existence de l'intégrale.

Niveau 2 :

(E2) : Nature selon $x \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}t^x dt$.

(E2) : Nature selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(t)dt$.

(E2) : Démontrer que la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0+\infty[$.

Niveau 3 :

(E3) : Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

(E3) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{1+t}dt$.
Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$? Déterminer de deux façons un équivalent u_n quand n tend vers $+\infty$.

Semaine 5 : Intégrales à paramètres + Révisions d'algèbre linéaire.