



Programme de Colles

Semaine 3

du 30 septembre au 4 octobre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8 et 9.

Rappels sur l'intégration :

1. Fonction continue par morceaux, intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés.
2. Primitive et intégration : théorème fondamental. Etude des fonctions $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.
3. Intégration par parties. Changement de variable.
4. Rappels sur les sommes de Riemann (pas constant).
5. Si f continue et positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $\forall t \in [a, b], f(t) = 0$ (**D1**).
6. Formule de Taylor avec reste intégrale (**D1**). Formule de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young.
7. Quelques techniques de calcul : intégrales de fractions rationnelles, de $x \mapsto e^{\alpha x}P(x)$ et de $x \mapsto e^{\alpha x} \sin(ax)$ ou $e^{\alpha x} \cos(ax)$.

Convergence des intégrales impropres (ou généralisées) :

1. Intégrale impropre sur $]a, b]$ ou sur $[a, b[$. Convergence, divergence, exemples.
2. Intégrale faussement impropre (i.e cas où la fonction intégrée est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$).
3. Intégrales de références : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_0^1 \ln(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$.
4. Intégrale impropre sur $]a, b[$.
5. Propriétés : linéarité, relation de Chasles.
6. Précautions de calculs :
 - intégration par parties : on revient sur un segment ou on travaille directement avec l'intégrale impropre en précisant soigneusement l'existence des limites.
 - changement de variable : on se ramène sur un segment puis on passe à la limite ou on utilise le théorème de changement de variable pour une intégrale impropre (φ de classe \mathcal{C}^1 et strictement monotone).
7. Intégrales à valeurs dans \mathbb{C} : $\int_a^b f(t)dt$ converge $\iff \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t)dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)(t)dt$ convergent.

Intégrales de fonctions positives :

1. Monotonie, si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux et positive, alors $F : X \mapsto \int_a^X f(t)dt$ est croissante.
Deux cas possibles : F majorée ou $\lim_{X \rightarrow b} F(X) = +\infty$.
2. Théorèmes de comparaisons : Comparaison de la nature de $\int f$ et de $\int g$ dans les cas $f \leq g$ (et donc $f = o(g)$), $f = O(g)$ et $f \sim g$. Cas de convergence et de divergence.
3. Intégrale impropre absolument convergente. Absolument convergente \implies Convergente.
Mais la réciproque est fautive. Intégrale semi-convergente.

Fonctions intégrables :

1. Fonctions intégrables (contient le caractère continu par morceaux), notation $\int_I f(t)dt$.
2. Adaptation des théorèmes de comparaisons.
3. Propriétés :
 - Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
 - Si f est intégrable sur I , alors elle l'est sur tout intervalle $J \subset I$.
 - Si f est **continue**, positive et intégrable sur I on a $\int_I f(t)dt = 0 \implies \forall t \in I, f(t) = 0$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Calculs d'intégrales du type $\int P(x)e^{\alpha x}$ ($P(X)$ polynôme), $\int \cos(ax)e^{\alpha x}dx$, $\int \sin(ax)e^{\alpha x}dx$.

(E1) : Calculs d'intégrales de fractions rationnelles.

(E1) : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue et T périodique.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(u)du = \int_0^T f(u)du$.

(E1) : Nature et calcul de $\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

(E1) : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge, puis la calculer.

(E1) : Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ est convergente, puis à l'aide d'un changement de variable, qu'elle vaut 0.

(E1) : Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Niveau 2 :

(E2) : Nature selon $x \in \mathbb{R}$, de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt$.

(E2) : Nature selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(t) dt$.

Niveau 3 :

(E3) : Démontrer que $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$ diverge.

Semaine 4 : Intégrales impropres + Intégrales à paramètres (tout).