PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 22

du 24 au 28 mars

Équations différentielles :

1. Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : $ay' + by = c$: définition, théorème de Cauchy-Lipschitz, interprétation graphique, structure des solutions, variation de la constante, raccordements des solutions.
2. Équations d'ordre 2 à coefficients constants (cf Vade Mecum). Recherche de solutions particulières quand le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$.
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : définition théorème de Cauchy-Lipschitz, structure des solutions (équation homogène ou pas). Exemple de recherche de solutions développables en série entière, exemple de résolution par la méthode de Lagrange (variation d'une seule constante).

Fonctions de plusieurs variables :

Il s'agit ici d'étudier les fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}}$.

1. Ensemble de définition, applications partielles, continuité.
2. Dérivée selon la direction d'un vecteur non nul, dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, opérations.
3. Développement limité à l'ordre 1, application différentielle en un point, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.
4. Règle de la chaîne, application au changement de variable affine et au passage en coordnnées polaires. Exemple d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1.
5. Les fonctions différentielle nulle sur un ouvert convexe sont les fonctions constantes.
6. Gradient.
7. Applications géométriques (tout est admis) :
   - Courbe du plan défini par une équation $F(x, y) = 0$ (F est $\mathcal{C}^1$), point régulier, tangente en un point régulier (lien avec le gradient).
   - Surface de l'espace défini par une équation $F(x, y, z) = 0$ (F est $\mathcal{C}^1$), point régulier, plan tangent en un point régulier (lien avec le gradient). Courbes tracées sur une surface, lignes de niveau, courbes coordonées.
8. Dérivées d'ordre supérieurs, fonction de classe $\mathcal{C}^k$, théorème de Schwarz, matrice Hessienne, formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
9. **(pour les colles du jeudi)** Extrema : condition suffisante (théorème des bornes atteintes), condition nécessaire (point critique). Étude du signe de $f(a+h) - f(a)$ soit explicitement, soit au voisinage de a avec la matrice hessienne et le développement limité à l'ordre 2. Recherche d'extrema sur des parties fermées et bornées.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Résolution d'une équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x}$ $(a, b, c$ constants).

(E1) : Trouver les fonctions puissances solutions de $(\mathcal{E}_0) : x^2y'' + xy' - y = 0$.
En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : x^2y'' + xy' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

(E1) : On considère la fonction $g : \begin{cases} (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{cases}$
Montrer que de g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(E1) : On considère la fonction $h : \begin{cases} (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{cases}$
Montrer que les applications partielles de h en $(0,0)$ sont continues en 0 mais que h n'est pas continue en $(0,0)$.

(E1) : Etudier l'existence de dérivées partielles en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de la fonction

$$g : \begin{cases} (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

(E1) : On considère l'application $f : x \in \mathbb{R}^p \longmapsto \|x\|_2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.
2. Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$, déterminer $df(a)$ et écrire en justifiant le développement limité à l'ordre 1 de f en a.

(E1) : Soit $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Déterminer un ouvert U_1 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_1 définie par :

$$\varphi_1 : \begin{cases} U_1 & \longrightarrow & V_1 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{cases}$$

est bijective. Exprimer φ_1^{-1}.

(E1) : On considère la courbe $\mathcal{C} : 2x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 1$. Démontrer que cette courbe est régulière et déterminer l'équation de sa tangente en un point $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$.

(E1) : Montrer que la surface $\mathcal{S} : x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 9$ est régulière et déterminer l'équation de son plan tangent en $M_0(1,1,1)$.

Niveau 2 :

(E2) : Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $xy'' + 2y' - xy = 0$.
Trouver les solutions f de $(\mathcal{E})$ développables en série entière au voisinage de 0 et telles que $f(0) = 1$, puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

(E2) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
Exprimer les dérivées partielles de F en fonctions de celles de f.
En déduire la résolution sur $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$: $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(E2) : On munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel et on considère l'application $f : x \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto \|x\|_2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
2. Pour tout $a \in U$, déterminer $H_f(a)$.

Niveau 3 :

(E3) : Soit $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \leq 0\}$. Déterminer un ouvert U_2 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_2 définie par :

$$\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} U_2 & \longrightarrow & V_2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est bijective et exprimer φ_2^{-1}.

(E3) : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$ une direction non nulle. Montrer que la fonction $\varphi_v :\ t \longmapsto f(a+tv)$ est deux fois dérivable en 0 et que :

$$\varphi_v'(0) = df(a).v \text{ et } \varphi_v''(0) = v^T H_f(a) v.$$

Bon courage à tous pour vos révisions, et très belle réussite aux concours !