Programme de Colles

Semaine 19

du 3 au 7 mars

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 et 15.

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien :

1. Isométrie vectorielle, matrices orthogonales : révisions
2. Endomorphismes autoadjoint, théorème spectral : révisions
3. Endomorphismes autoadjoint positifs (resp définis positifs) : définition par le produit scalaire.
4. Orientation d'un espace euclidien. Dans un espace euclidien orienté de dimension 2, orientation d'une droite vectorielle par un vecteur normal. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, orientation d'un plan vectoriel par un vecteur normal. Déterminant en base orthonormée directe (interprétation en terme de surface ou de volume en dimension 2 et 3 respectivement).
5. Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3. Définition à l'aide d'une forme linéaire. Propriétés (la plupart ont été admises). Expression en base orthonormée directe. Application à la recherche des sous-espaces propres d'une matrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
6. Isométries vectorielles d'un plan euclidien. Description complète de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ **(D1)** et de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
7. Isométries vectorielles **directes** d'un espace euclidien de dimension 3. Recherche de l'axe (orienté) et de l'angle de la rotation quand E est orienté. Deux méthodes sont données.

Rappels sur les fonctions numériques (révisions en autonomie) :

1. Limite, continuité : définition, caractérisation séquentielle.
2. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une application continue. Théorème de la bijection monotone. Image d'un segment par une application continue.
3. Dérivabilité. Dérivée de la bijection réciproque. Dérivée et extremum. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Théorème de la limite de la dérivée.
4. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Formule de Leibniz.
5. Formule de Taylor avec reste intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.
6. Convexité : définition, conséquences graphiques. Parmi les fonctions dérivables (resp. 2 fois dérivables) caractérisation des fonctions convexes. Inégalités à connaître.

   Remarque : L'inégalité de Jensen n'est pas explicitement au programme.

Normes sur un espace vectoriel :

1. Norme, distance, norme associée à un produit scalaire (on donne celles issues des produits scalaires usuels).
2. Normes N_1 **(D1)**, N_2 et N_∞ **(D1)** sur $\mathbb{K}^p$.
3. Normes $\mathcal{N}_1$ **(D1)**, $\mathcal{N}_\infty$ **(D2)** sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
4. Normes équivalentes. Exemple en dimension infinie. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).
5. Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Représentation des boules unités dans $\mathbb{R}^2$ avec les trois normes précédentes.
6. Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.
   Ces notions dépendent du choix de la norme, sauf en cas d'équivalence de normes.
7. Parties convexes.

Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie :

1. Définition, convergence.
2. Unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, limite des suites extraites, s.e.v. des suites convergentes.
   Ces notions dépendent du choix de la norme, sauf dans le cas où elles sont équivalentes.
3. En dimension finie, caractérisation à l'aide des suites coordonnées.

Fonctions vectorielles (peu d'exercices traités en classe) :

On s'intéresse ici aux fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On pourra éventuellement adapter les énoncés aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Limite, continuité, caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
2. Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^n$. Caractérisations à l'aide des fonctions coordonnées. Dérivable en $a \implies$ continue en a.
3. Opérations sur les dérivées : linéarité, dérivée de $L \circ f$ avec $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, dérivée de $f \circ \varphi$ avec φ fonction à valeurs réelles, dérivée de $B(f, g)$ avec B bilinéaire (application au produit scalaire, au déterminant, au produit d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle)
4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Lien avec les fonctions coordonnées. Formule(s) de Leibniz.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
On pourra aussi demander la version matricielle.

(E1) : Savoir diagonaliser une matrice symétrique réelle 3×3 en base orthonormée.

(E1) : Savoir donner les éléments caractéristiques (axe orienté, angle) d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice dans la base canonique (b.o.n.d).

(E1) : On note E la fonction *partie entière* et on considère $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) + E(-x)$.
Démontrer que la fonction f n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.

(E1) : Soit $f : [0, 1] \longmapsto [0, 1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

(E1) : Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x \ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $] - 1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

(E1) : Calculer de deux façons la dérivée $n-$ième de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$.

(E1) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(E1) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$.

(E1) : La boule $B(a, r)$ est une partie bornée.

Niveau 2 :

(E2) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
On pourra aussi demander la version matricielle.

(E2) : Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0,1],\ f(x) = x\}$ admet un minimum.

(E2) : Montrer qu'une fonction $f :]0,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en 0 et en $+\infty$ est bornée.

(E2) : On considère le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$ et on pose $P_n = U_n^{(n)}$.
Démontrer que P_n possède n racines distinctes et qu'elles appartiennent à $]-1,1[$.

(E2) : Démontrer que pour tous $a, b \in]1,+\infty[$, on a $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

(E2) : Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x) \leq nN_\infty(x)$.

(E2) : La boule $\bar{B}(a,r)$ est une partie convexe.

(E2) : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$ (2 méthodes proposées, la 3ème la semaine prochaine).

Niveau 3 :

(E3) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(E3 - Inégalité de Jensen) : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Démontrer que :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \ \leq\ \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

(E3) : On note $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ les normes usuelles sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{N}_2$ domine $\mathcal{N}_1$, que $\mathcal{N}_\infty$ domine $\mathcal{N}_2$ mais que $\mathcal{N}_1$ ne domine pas $\mathcal{N}_\infty$.

Semaine 20 : Fonctions vectorielles + Espaces vectoriels normés (suite).