PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 18

du 24 au 28 février

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 et 15.

Espaces préhilbertiens réels : révisions

Distance à un s.e.v. de dimension finie :

1. Pour qu'un vecteur de E soit un élément de $F^{\perp}$ il faut et il suffit qu'il soit orthogonal aux vecteurs d'une famille génératrice de F.
2. Soit F un s.e.v. de E, si F est de dimension finie alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ **(D2)**.
   Conséquence : si E est de dimension finie, alors pour tout s.e.v. F de E,
   on a $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$ et $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.
3. Projection orthogonale : définition. Si p est la projection orthogonale sur F on a
   $$y = p(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in F \\ \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$$
   Expression de $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$ si l'on dispose d'une b.o.n. $(e_1, \dots, e_p)$ de F. Symétrie orthogonale.
4. Interprétation de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à l'aide de projetés orthogonaux.
5. Distance à un s.e.v. de dimension finie. Définition.
   Si p est la projection orthogonale sur F alors pour tout $u \in E$ on a :
   (a) $d(u, F) = ||u - p(u)||$,
   (b) $p(u)$ est le seul vecteur v de F tel que $||u - v||$ réalise la distance de u à F,
   (c) $||u||^2 = ||p(u)||^2 + d(u, F)^2$.
6. Inégalité de Bessel.
7. Vecteur normal à un hyperplan. Distance à un hyperplan dans un espace euclidien.
   Les étudiant doivent savoir **sans hésiter** déterminer la distance d'un vecteur à un plan dans $\mathbb{R}^3$. Plusieurs méthodes ont été proposées.

Réduction : révisions

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien :

1. Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition (endomorphisme qui conserve la norme), caractérisations, groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$. Si F est stable par $f \in \mathcal{O}(E)$ alors $F^{\perp}$ l'est aussi **(D3)**.
2. Matrice orthogonale : définition ($M^T M = I_n$), caractérisations.
   Interprétations : Soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E. On a les propositions suivantes.
   - Pour toute base $\mathcal{B}'$ de E : $\quad \mathcal{B}'$ base orthonormée de $E \quad \Longleftrightarrow \quad P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   - Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$: $\quad u \in \mathcal{O}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminant d'un automorphisme (d'une matrice) orthogonal(e), isométries vectorielles directes.

4. Endomorphismes autoadjoint : définition, exemples, matrice dans une base orthonormée.

   Les valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint (resp. d'une matrice symétrique réelle) sont réelles **(D2)**.

   Théorèmes spectral : les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont supplémentaires orthogonaux, diagonalisation en b.o.n., version matricielle.
5. Endomorphismes autoadjoint positifs (resp définis positifs) : définition par le produit scalaire.
6. Orientation d'un espace euclidien. Dans un espace euclidien orienté de dimension 2, orientation d'une droite vectorielle par un vecteur normal. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, orientation d'un plan vectoriel par un vecteur normal. Déterminant en base orthonormée directe (interprétation en terme de surface ou de volume en dimension 2 et 3 respectivement).
7. Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3. Définition à l'aide d'une forme linéaire. Propriétés (la plupart ont été admises). Expression en base orthonormée directe. Application à la recherche des sous-espaces propres d'une matrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
8. Isométries vectorielles d'un plan euclidien. Description complète de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ **(D1)** et de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
9. Isométries vectorielles **directes** d'un espace euclidien de dimension 3. Recherche de l'axe (orienté) et de l'angle de la rotation quand E est orienté. Deux méthodes sont données.

Rappels sur les fonctions numériques (révisions en autonomie) :

1. Limite, continuité : définition, caractérisation séquentielle.
2. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une application continue. Théorème de la bijection monotone. Image d'un segment par une application continue.
3. Dérivabilité. Dérivée de la bijection réciproque. Dérivée et extremum. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Théorème de la limite de la dérivée.
4. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Formule de Leibniz.
5. Formule de Taylor avec reste intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.
6. Convexité : définition, conséquences graphiques. Parmi les fonctions dérivables (resp. 2 fois dérivables) caractérisation des fonctions convexes. Inégalités à connaître.

   Remarque : L'inégalité de Jensen n'est pas explicitement au programme.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Savoir trouver rapidement une distance d'un vecteur à un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

(E1) : Savoir trouver rapidement un projeté orthogonal sur un plan de $\mathbb{R}^3$, ou encore la matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

(E1) : Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

(E1) : Les symétries orthogonales sont des endomorphismes autoadjoint.

(E1) : Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et si λ, μ sont des valeurs propres distinctes de u alors $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$.

(E1) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

On pourra aussi demander la version matricielle.

(E1) : Savoir diagonaliser une matrice symétrique réelle 3×3 en base orthonormée.

(E1) : Savoir donner les éléments caractéristiques (axe orienté, angle) d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice dans la base canonique (b.o.n.d).

(E1) : On note E la fonction *partie entière* et on considère $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) + E(-x)$.

Démontrer que la fonction f n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.

(E1) : Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue.

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

(E1) : Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

(E1) : Calculer de deux façons la dérivée $n-$ième de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

(E1) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(E1) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$.

Niveau 2 :

(E2) : Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On oriente E par la base $\mathcal{B}$.
Montrer que pour toute autre base orthonormée **directe** $\mathcal{B}'$, on a $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

(E2) : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante.

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} p \circ p = p \\ \text{ et} \\ p \text{ est un endomorphisme autoadjoint} \end{cases}$$

(E2) : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par u alors $F^{\perp}$ l'est aussi.

(E2) : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u répétées avec multiplicités et rangées dans l'ordre croissant. Démontrer que :

$$\forall x \in E, \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

(E2) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
On pourra aussi demander la version matricielle.

(E2) : Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0,1],\ f(x) = x\}$ admet un minimum.

(E2) : Montrer qu'une fonction $f :]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en 0 et en $+\infty$ est bornée.

(E2) : On considère le polynôme $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et on pose $P_n = U_n^{(n)}$.
Démontrer que P_n possède n racines distinctes et qu'elles appartiennent à $]-1, 1[$.

(E2) : Démontrer que pour tous $a, b \in]1, +\infty[$, on a $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Niveau 3 :

(E3) : Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de P alors $|\lambda| = 1$.

(E3) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(E3 - Inégalité de Jensen) : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Démontrer que :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \ \leq \ \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Semaine 19 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien + Révisions fonctions numériques + Espaces vectoriels normés (début).