Programme de Colles

Semaine 16

du 27 au 31 janvier

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 et 15.

Probabilités : révisions

Variables aléatoires :

1. Définition, propriétés, lois, lois usuelles, couples, indépendance : révision
2. Espérance :
   (a) Espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs positives : les calculs sont autorisés dans $[0,+\infty]$ et dans ce cas, on dit que X est d'espérance finie si $\mathbb{E}(X)<+\infty$, ou encore si $\{x\mathbb{P}(X=x),\ x\in X(\Omega)\}$ est sommable.
   (b) Espérance des lois usuelles (toutes en **(D1)**) : $X\sim\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$, $X\sim\mathcal{B}(n,p)$, $X\sim\mathcal{G}(p)$ et $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$.
   (c) Si $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geq n)\in[0,+\infty]$
   (d) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe, variable aléatoire centrée.
   (e) Théorème du transfert.
   (f) Propriétés : linéarité, positivité, croissance, espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.
   (g) Définie positivité :
   $\Big(X\geq 0 \text{ et } \mathbb{E}(X)=0\Big) \implies \mathbb{P}(X=0)=1$ (l'événement $(X=0)$ est presque sûr).
3. Variance :
   (a) Variable admettant un moment d'ordre $p\in\mathbb{N}$. Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi.
   (b) Inégalité de Cauchy-Schwarz **(D3)** : X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY aussi et
   $$\Big(\mathbb{E}(XY)\Big)^2\leq\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$
   Cas d'égalité.
   (c) Variance, formule d'Huyghens-König, interprétation, loi réduite, propriétés.
   (d) Variance des lois usuelles (toutes en **(D1)**) : $X\sim\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$, $X\sim\mathcal{B}(n,p)$, $X\sim\mathcal{G}(p)$ et $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$.
   (e) Covariance (définition, propriétés).
   (f) Variance d'une somme finie de variables aléatoires discrètes.
4. Convergence et approximations :
   (a) Inégalités de Markov.
   (b) Inégalité de Bienaymé-Tchébychev.
   (c) Loi faible des grands nombres.
5. Fonction génératrice d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$:
   (a) Définition, propriétés : $R\geq 1$, valeur en 1, continuité (au moins) sur $[-1,1]$, classe $\mathcal{C}^\infty$ (au moins) sur $]-1,1[$, expression de $\mathbb{P}(X=x)$ à l'aide des dérivées successives.
   (b) Fonction génératrice des lois usuelles (à savoir retrouver rapidement).

(c) Lien avec l'espérance : X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 **(D3)**.
(d) Lien avec la variance : seulement en exercice (pas d'énoncé au programme).
(e) Fonction génératrice de la somme de variables aléatoires indépendantes. On retrouve la loi de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, ou $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$.

Espaces préhilbertiens réels :

1. Produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples à connaître : produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz **(D1)**.
3. Inégalité de Minkowski, norme associée à un produit scalaire.
4. Identités de polarisation.
5. Orthogonalité :
   (a) Vecteurs unitaires, familles orthogonales, orthonormales, une famille orthogonale dont les vecteurs sont tous non nuls est libre **(D2)**.
   (b) Théorème de Pythagore pour la somme de 2 vecteurs (réciproque).
   (c) Sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'une partie A (noté $A^\perp$), c'est un s.e.v. de E, propriétés :

$$\begin{array}{llll} i. & E^\perp = \{0\}, \{0\}^\perp = E & iii. & F \cap F^\perp = \{0\} \\ ii. & F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp & iv. & F \subset \left(F^\perp\right)^\perp \end{array}$$

6. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
7. Espaces euclidiens :
   (a) Définition, bases orthonormales, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, Théorème de la base orthonormée incomplète.
   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E.
   Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ on pose $X = \mathcal{M}_\mathcal{B}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_\mathcal{B}(y)$. On a alors :

$$x_i = (e_i|x) \quad \text{et donc} \quad x = \sum_{i=1}^n (e_i|x) e_i.$$
$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \ {}^tX.Y \quad \text{et donc} \quad ||x||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \ {}^tX.X$$

   (c) Formes linéaires en dimension finie : $\forall f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}),\ \exists! a \in E,\ \forall y \in E, \quad f(y) = (a|y)$.
   Expression en base orthonormée.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov.
(E1) : Fonctions génératrices des lois usuelles (une ou plusieurs au choix du colleur)
(E1) : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (définition et démonstration).
(E1) : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (définition et démonstration).
(E1) : Dans l'espace affine $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'équation du plan passant par $A(1,2,0)$ et orthogonal à $\vec{n} = (1,-1,2)$.

(E1) : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'égalité $\operatorname{tr}(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i \rangle$.

(E1) : Savoir orthonormaliser une base de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire usuel.

Niveau 2 :

(E2) : Soit X une variable aléatoire discrète réelle (ou complexe) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si X admet un moment d'ordre $r \geq 2$, alors elle admet un moment d'ordre s pour tout $s \in \{1, \dots, r\}$.

(E2) : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ deux-à-deux indépendantes et suivant une même loi. On suppose que les X_i^2 sont d'espérance finie et on note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad m = \mathbb{E}(X_1) \ \text{ et } \ \sigma = \sigma(X_1)$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \ \leq \ \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

(E2) : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer que si pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$ alors $A = B$.

(E2) : Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux-à-deux.

Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrer que la base de Lagrange associée à $a_0, a_1, \dots, a_n$ est une base orthonormée de $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle \ , \ \rangle$.
3. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Niveau 3 :

(E3) : Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X est d'espérance finie.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} (N+1)\mathbb{P}(X \geq N+1) = 0$, et retrouver la deuxième expression de $E(X)$.

(E3) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov en utilisant une fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$.

(E3) : Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux-à-deux. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire et déterminer une base orthonormée de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P(\alpha)$.
   Justifier qu'il s'agit d'une forme linéaire et déterminer l'unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ pour lequel on a :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = \langle Q, P \rangle.$$

Semaine 17 : Espaces préhilbertiens réels + Révisions d'algèbre linéaire (réduction) + Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (début)