PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 15

du 20 au 24 janvier

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 et 15.

Probabilités : révisions

Variables aléatoires :

1. Définition, événements associés ($X \in F$), propriétés, système complet d'événements associé à X.
2. Loi d'une variable aléatoire $\mathbb{P}_X$, caractérisation, notation $X \sim Y$ lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, fonction de variable aléatoire, $X \sim Y \Longrightarrow f(X) \sim f(Y)$, loi conditionnelle de X sachant un événement A.
3. Exemples à connaître :
   (a) loi uniforme (notation $X \sim \mathcal{U}(E)$).
   (b) loi de Bernoulli (notation $X \sim \mathcal{B}(p)$).
   (c) loi binomiale (notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$).
   (d) loi géométrique (notation $X \sim \mathcal{G}(p)$).
   (e) loi de Poisson (notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$).
4. Couples, vecteurs de variables aléatoires :
   (a) Définition, loi conjointe, lois marginales, généralisation à n variables aléatoires.
   (b) Lois conditionnelles de X sachant $(Y = y)$ et de Y sachant $(X = x)$.
   (c) Indépendance de 2 variables aléatoires (définition et caractérisation), notation $X \perp\!\!\!\perp Y$, indépendance de n variables aléatoires (ou d'une suite de variables aléatoires), suite indépendante et identiquement distribuée (i.d.d.) de variables aléatoires.
   (d) Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ le sont aussi, lemme des coalitions.
   (e) Somme de deux variables aléatoires indépendantes (sur des exemples), somme de lois binomiales, somme de lois de Poisson.
5. Espérance :
   (a) Espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs positives : les calculs sont autorisés dans $[0, +\infty]$ et dans ce cas, on dit que X est d'espérance finie si $\mathbb{E}(X) < +\infty$, ou encore si $\{x\mathbb{P}(X = x),\ x \in X(\Omega)\}$ est sommable.
   (b) Espérance des lois usuelles (toutes en **(D1)**) : $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   (c) Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \in [0, +\infty]$
   (d) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe, variable aléatoire centrée.
   (e) Théorème du transfert.
   (f) Propriétés : linéarité, positivité, croissance, espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.
   (g) Définie positivité :
   $$\Big(X \geq 0 \text{ et } \mathbb{E}(X) = 0\Big) \implies \mathbb{P}(X = 0) = 1 \quad \text{(l'événement } (X = 0) \text{ est presque sûr).}$$

6. Variance :

   (a) Variable admettant un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi.
   (b) Inégalité de Cauchy-Schwarz **(D3)** : X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY aussi et

   $$\Big(\mathbb{E}(XY)\Big)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

   Cas d'égalité.
   (c) Variance, formule d'Huyghens-König, interprétation, loi réduite, propriétés.
   (d) Variance des lois usuelles (toutes en **(D1)**) : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   (e) Covariance (définition, propriétés).
   (f) Variance d'une somme finie de variables aléatoires discrètes.

7. Convergence et approximations :

   (a) Inégalités de Markov.
   (b) Inégalité de Bienaymé-Tchébychev.
   (c) Loi faible des grands nombres.

8. Fonction génératrice d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$:

   (a) Définition, propriétés : $R \geq 1$, valeur en 1, continuité (au moins) sur $[-1,1]$, classe $\mathcal{C}^\infty$ (au moins) sur $]-1,1[$, expression de $\mathbb{P}(X = x)$ à l'aide des dérivées successives.
   (b) Fonction génératrice des lois usuelles (à savoir retrouver rapidement).
   (c) Lien avec l'espérance : X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 **(D3)**.
   (d) Lien avec la variance : seulement en exercice (pas d'énoncé au programme).
   (e) Fonction génératrice de la somme de variables aléatoires indépendantes. On retrouve la loi de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, ou $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n.$$

(E1) : Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
(E1) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov.
(E1) : Fonctions génératrices des lois usuelles (une ou plusieurs au choix du colleur)

Niveau 2 :

(E2) : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et telle que :

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}_{(X>k)}(X > k+n) = \mathbb{P}(X > n)$$

Montrer que X suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
(E2) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on se donne $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda > 0$. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

(E2) : Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X,Y)=(p,q)) = \mathbb{P}(X=p, Y=q) = \lambda \frac{p+q}{p!q!2^{p+q}}.$$

Déterminer λ, calculer les lois marginales. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(E2) : Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1,p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2,p)$ deux variables indépendantes. Déterminer la loi de X_1+X_2. On pourra admettre la formule de Van der Monde.

(E2) : Soit X une variable aléatoire discrète réelle (ou complexe) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si X admet un moment d'ordre $r \geq 2$, alors elle admet un moment d'ordre s pour tout $s \in \{1, \dots, r\}$.

(E2) : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ deux-à-deux indépendantes et suivant une même loi. On suppose que les X_i^2 sont d'espérance finie et on note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad m = \mathbb{E}(X_1) \ \text{ et } \ \sigma = \sigma(X_1)$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \ \leq \ \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Niveau 3 :

(E3) : Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X est d'espérance finie. Démontrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} (N+1)\mathbb{P}(X \geq N+1) = 0$, et retrouver la deuxième expression de $E(X)$.

(E3) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov en utilisant une fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$.

Semaine 16 : Variables aléatoires + Espaces préhilbertiens réels (début)