Programme de Colles

Semaine 10

du 2 au 6 décembre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 et 14.

Réduction : révisions

Applications de la réduction :

1. Calcul des puissances de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: soit à partir de la réduction, soit à partir d'un polynôme annulateur.
2. Résolution de systèmes différentiels (seul un cas diagonalisable a été vu en cours).
3. Résolution d'équations matricielles (exemples : recherche de commutants, recherche de racines de matrices)

Suites et séries de fonctions :

1. Différents types de convergence :
   (a) Convergence simple (conservation de la monotonie, de la convexité par limite simple)
   (b) Norme infinie d'une fonction bornée sur un intervalle I (définition, démonstration **(D2)**).
   Le nouveau programme autorise d'écrire directement $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ *pour* $A \subset \mathbb{R}$ *et* $\lambda \geq 0$.
   (c) Convergence uniforme, et convergence normale pour les séries de fonctions.
   (d) Procédés d'étude. Liens entre ces différentes notions. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout x.
2. Continuité (pour les suites et séries de fonctions).
3. Théorème de double limite (a priori seulement pour les séries de fonctions).
4. Dérivation (pour les suites et séries de fonctions)
5. Intégration sur un segment en cas de convergence uniforme (pour les suites et séries de fonctions).
6. Intégration sur un intervalle quelconque :
   (a) Théorème de convergence dominée pour les suites et pour les séries de fonctions
   (b) Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

Intégration : révisions (tout sauf intégrales à paramètre $x \in \mathbb{R}$)

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Application : calcul de puissances de matrices (en utilisant la réduction ou à l'aide d'un polynôme annulateur)

(E1) : On pose $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(E1) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergence uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On pourra utiliser la formule de Stirling.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, A]$ puis sur $\mathbb{R}^+$.

(E1) : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction zeta de Riemann définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et exprimer $\zeta'(x)$ à l'aide d'une série.

(E1) très court : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)dt$.

(E1) : Un des deux **(E2*)** au choix de l'étudiant

Niveau 2 :

(E2) : Application : recherche de commutants.

(E2) : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t)=(-1)^n\dfrac{t^n}{n}$ et $S_n(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f_k(t)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{t^k}{k}$.

- Etudier la convergence simple de $\sum f_n$.
- Démontrer que pour tout $a\in]0,1[$, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.
- Démontrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

(E2) : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{n^2+x^2}$.
Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur un segment $[0,A]\subset\mathbb{R}^+$.
Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

(E2) : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=e^{-x\sqrt{n}}$ et on considère $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-x\sqrt{n}}$.
Déterminer l'ensemble de définion D de f. Montrer que f est continue sur D et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

(E2) : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

(E2*) : Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\cos^n(\pi+t)dt$.

(E2*) : Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=-\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t}dt$.

Niveau 3 :

(E3) : Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ des scalaires distincts et $n_1,\dots,n_q$ des entiers naturels non nul.

On note $n=n_1+\cdots+n_q$ et $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_q I_{n_q}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer $\mathrm{Com}(A)$.

(E3) : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=e^{-x\sqrt{n}}$ et on considère $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-x\sqrt{n}}$.
En encadrant $f(x)$ par des intégrales, démontrer que $f(x)\underset{x\to0+}{\sim}\dfrac{2}{x^2}$.

(E3) : Énoncer le théorème de dérivation pour la limite f d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Démontrer que lorsque les hypothèses sont vérifiées, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment.

(E3) : Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt=0$.
En admettant le théorème de Weierstrass, démontrer que f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

Semaine 11 : Suites et séries de fonctions + Séries entières (début).