**PSI 2024-2025**
**Lycée Châtelet**

# Programme de Colles

## Semaine 1

du 16 au 20 septembre

**Vade Mecum :** Thèmes 1, 2, 3, 6, 8 et 9.

**Rappels sur les suites :**

1. Rappels sur la borne supérieure (ou inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ (définition, condition existence, convention $\sup(A) = +\infty$ quand $A$ n'est pas majorée)
2. Suites réelles ou complexes (limites, monotonies, th. d'existence de limite,...), suites adjacentes.
3. Toute suite convergente est bornée **(D1)**.
4. Le terme général d'une suite réelle qui converge vers $\ell > 0$ est strictement positif à partir d'un certain rang.
5. Limites, relations de comparaisons (être *dominé, équivalent, négligeable*).
6. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Suites arithmético-géométriques.
7. Suites définies par une relation $f(u_n) = u_{n+1}$ : limites éventuelles quand $f$ est continue **(D1)**, utilisation de l'inégalité des accroissements finis, monotonie :
   — étude du signe de $f(x) - x$,
   — si la fonction $f$ est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone **(D1 dans le cas $u_0 \leq u_1$)**.
8. Exemples de suites définies implicitement comme solution d'équation, ou comme intégrale, développements asymptotiques.

**Séries numériques, généralités :**

1. Définition, terme général, somme partielle d'ordre $n$.
2. Nature d'une série numérique, somme d'une série convergente.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique, on a : $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge $\iff$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge .
4. Structure de $\mathbb{K}-$espace vectoriel, sous-espace des séries convergentes.
5. Reste partiel d'ordre $n$ d'une série convergente, il tend vers 0 quand $n \to +\infty$ **(D1)**.
6. Le terme général d'une série convergente tend vers 0 mais la reciproque est fausse **(D1)**.
7. Définition d'une série géométrique, expression de la somme partielle d'ordre $n$, nature et expressions, en cas de convergence, de la somme et du reste partiel d'ordre $n$.

**Séries à termes positifs :**

1. Définition, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante (deux cas se présentent : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée ou non).

   Convention : Si $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, on peut écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.
2. Théorèmes de comparaisons relatifs aux séries à termes positifs :
   (a) Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang (par exemple si $u_n = o(v_n)$)
   $$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge}$$
   $$\sum u_n \text{ diverge} \implies \sum v_n \text{ diverge}$$
   (b) Si $u_n = O(v_n)$ : $\sum v_n$ converge $\implies$ $\sum u_n$ converge
   (c) Si $u_n \sim v_n$ : $\sum v_n$ converge $\iff$ $\sum u_n$ converge

3. Application aux séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$.
4. Règle de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs.

**Séries à termes quelconques :**

1. Série à termes complexes.
2. Théorème des séries alternées, encadrement de la somme par les sommes partielles d'indices pairs et impairs (les suites sommes partielles d'indices pairs et d'indices impairs sont adjacentes), signe et majoration en valeur absolue du reste partiel.
   Exemples : séries de Riemann alternées, exemples d'utilisation de développements asymptotiques.
3. Une série absolument convergente est convergente. Suite sommable, notation $\sum |u_n| < +\infty$.
   Convergence absolue des séries géométrique et exponentielle.
   **Théorème de comparaison :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique (réelle ou complexe) et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes **positifs**. Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
4. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
   Application : $\forall (z+z') \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ **(D1)**.

**Calculs pratiques :**

1. Séries de Bertrand : aucun résultat n'est au programme. Il faut savoir les étudier.
2. Encadrements à l'aide d'intégrales : « *Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.* »
   Aucun théorème n'est au programme. Plusieurs exemples ont été rédigés en classe.

**Remarque :** La formule de Stirling a été donnée et peut-être demandée. Sa démonstration n'est pas au programme.

**Exercices à connaître :**

$\boxed{\textbf{Niveau 1 :}}$

**(E1) :** Soit $L \in ]0,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique vérifiant $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

**(E1) :** Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, puis montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.

**(E1) :** Déterminer la nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

**(E1) :** Nature de la série harmonique par utilisation des théorèmes de comparaison.

**(E1) :** Nature des séries $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ et/ou $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2(n)}$.

**(E1) :** Nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ par comparaison à une intégrale.

**Niveau 2 :**

**(E2) :** Démontrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge. Quel est le signe de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ?

Etudier la nature de la série de terme général $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

**(E2) :** Nature des séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ dans les cas où $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$.

**(E2) :** Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n}$ et un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

**(E2) :** Déterminer un équivalent quand $n$ tend vers $+\infty$ de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

**Niveau 3 :**

**(E3) :** Soit $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer les équivalences suivantes :

$$(1) \quad \alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A, \quad \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ d'éléments de } A, \text{ telle que } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha. \end{cases}$$

**(E3) :** Écrire avec les quantificateurs les définitions suivantes ($a$ est un réel).

1. $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$
2. $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$
3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)$
4. $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$
5. $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$
6. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$

**(E3) :** Énoncer et démontrer le théorème de Cesàro.

**(E3) :** Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$. En déduire la nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha}$.

**(E3) :** Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

**(E3) :** Démontrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et en déduire la convergence $\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

**(E3) : Au choix de l'étudiant, l'un des deux exercices suivants.**

- Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ telles que $b_n \geq 0$ et $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.

  Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.

- Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ telles que $b_n \geq 0$ et $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.

  Montrer que si $\sum b_n$ diverge, alors on a $\sum_{k=0}^{n} a_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$.

**Semaine 2 :** Suites numériques + Séries numériques + Rappels et compléments sur l'intégration.