PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine B

du 9 au 13 septembre

Vade Mecum : Thèmes 1, 2 et 3.

Rappels sur les polynômes : **révisions en autonomie !**

1. Loi usuelles : $., +, \times, \circ$
2. Degré : définition, propriétés.
3. Multiples et diviseurs.
4. Dérivation, formule de Taylor.
5. Racines : définition, multiplicité, relations coefficients/racines (pas de formule générale au programme).
6. Décomposition en produits de facteurs irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$).

Partie 1 du DNS0 (révisions et entraînement)

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de $P_n(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.
(E1) : On considère une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Déterminer le degré de T_n, son terme dominant et sa parité.
(E1) : Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $X^2 - 2X + 1$.
(E1) : Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - 1$.
(E1) : On considère le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-2)\dots(X-n)$.
Démontrer que $P'(X)$ possède une unique racine dans $]0,1[$.

Niveau 2 :

(E2) : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que : $\quad B = X^2 + X + 1$ divise $P \iff P(j) = 0$.
(E2) : Déterminer les racines de $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux d'entre elles vaut la troisième.

Semaine 1 : Suites numériques + Séries numériques.