PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine A

du 2 au 6 septembre

Vade Mecum : Thèmes 1 et 2.

Rappels sur les complexes : **révisions en autonomie !**

1. Définition, partie réelle, partie imaginaire. Opérations.
2. Affixe d'un point ou d'un vecteur. Conjugaison, module, opérations. Interprétation géométrique. Inégalités triangulaires. Équation d'un cercle.
3. Nombres complexes de module 1, notation exponentielle, propriétés algébriques. Formule de Moivre, formules d'Euler. Linéarisations, méthode de l'arc moitié.
4. Forme exponentielle ou trigonométrique d'un complexe non nul. Argument, propriétés algébriques.
5. Racines n-ièmes de l'unité, cas particulier des racines carrées. Équations de degré 2.
6. Fonction exponentielle complexe, propriétés algébriques.
7. Nombres complexes et géométrie. Angle de vecteurs, caractérisation d'alignement et d'orthogonalité, translations et similitudes.
8. Applications : suites vérifiant une relation $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$, dérivation de $x \longmapsto e^{\varphi(x)}$ avec φ fonction complexe dérivable, calcul d'intégrales à l'aide de la fonction exponentielle complexe.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$ soit imaginaire pur.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

(E1) : Déterminer des réels A (amplitude) et φ (déphasage) tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, ont ait :

$$2\cos(t) - 3\sin(t) = A\cos(t - \varphi).$$

En déduire la résolution de $(\mathcal{E})$: $2\cos(t) - 3\sin(t) = 0$.

(E1) : Calculer les racines carrées de $Z = -7 - 24i$.
Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$: $(12 - 3i)z^2 - 8iz + 32i = 0$.

Niveau 2 :

(E2) : Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on se donne deux points A et B.
Montrer qu'un point M appartient au cercle de diamètre $[A, B]$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

Semaine B : Polynômes + Suites numériques.