Chapitre 7

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

7.1 Espaces Vectoriels

7.1.1 Définitions et rappels

Définition 1

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} E\times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}\right.$$

et d'une application (appelée loi externe) notée . :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda.v \end{array}\right.$$

On dit que E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, si les conditions suivantes sont réalisées.

• $(E,+)$ est un groupe commutatif, ($+$ possède un élément neutre, $+$ est associative et commutative, et tout élément de E possède un symétrique (opposé) pour $+$)

• $\forall (u,v)\in E^2, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$:

$$\begin{array}{l} (\lambda+\mu).u = \lambda.u+\mu.u, \\ \lambda.(u+v) = \lambda.u+\lambda.v, \\ \lambda.(\mu.u) = (\lambda\times\mu).u, \\ 1.u = u. \end{array}$$

Les éléments de E sont appelés vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Exemple 7.1.
- $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}[X], \mathcal{F}(X,\mathbb{K}), \mathcal{F}(X,\mathbb{K}^n)$ *sont des* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels.*
- $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel.*

Définition 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E est un sous ensemble $F\subset E$ qui, muni des lois $+$ et ., est un espace vectoriel.

Proposition 1

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. On a l'équivalence suivante.

$$F \text{ s.e.v. de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F\neq\emptyset, \\ \forall(u,v)\in F^2, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 : \lambda.u+\mu.v\in F. \end{array}\right.$$

Exemple 7.2.

- $\{0_E\}$ *est le plus petit s.e.v. de* E.
- *l'intersection de deux s.e.v. de* E *est un s.e.v. de* E, *mais pas la réunion !*
- *Si* $u_1, \dots, u_n$ *sont des vecteurs de* E, *alors on définit* $F = \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$ *par :*

$$u \in \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_n\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Alors $F = \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$ *est un s.e.v. de* E.

- *Si* F *et* G *sont des s.e.v. de* E *alors* $F + G = \{f + g,\ f \in F, g \in G\}$ *est aussi un s.e.v. de* E.

7.1.2 Produit d'espaces vectoriels

On se donne deux espaces vectoriels $(F, ., +)$ et $(G, ., +)$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle ensemble produit $E = F \times G$ l'ensemble suivant.

$$E = F \times G = \{(x, y),\ x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

Sur cet ensemble, on définit les lois suivantes.

- La loi . : $\forall (x, y) \in F \times G,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y)$.
- La loi + : $\forall (x, y) \in F \times G,\ \forall (x', y') \in F \times G, \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

On peut sans difficulté étendre ces notions au produit de N espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 2

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels alors $E = E_1 \times \cdots \times E_p = \prod_{i=1}^{p} E_i$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

7.1.3 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 3

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $(E_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ une famille finie de s.e.v. de E. On appelle **somme** de la famille $(E_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ l'ensemble suivant.

$$\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} E_i \ = \ E_1 + \cdots + E_n \ = \ \{u_1 + \cdots + u_n,\ (u_1, \dots, u_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n\}.$$

On admet alors la proposition suivante.

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de s.e.v. de E. L'ensemble $E_1 + \cdots + E_n$ est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit espace vectoriel contenant la réunion des E_i.

Avec ces notations, on a la proposition suivante.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $(E_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ une famille finie de s.e.v. de E. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour toutes familles $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de $(E_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$, on a :

$$u_1 + \cdots + u_n = v_1 + \cdots + v_n \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i = v_i.$$

Autrement dit : *La « décomposition » d'un vecteur de* $E_1 + \cdots + E_n$ *est unique.*

(ii) Pour toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de $(E_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, on a :

$$u_1 + \cdots + u_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i = 0.$$

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est **directe** et on la note

$$\bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} E_i = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n.$$

Preuve. On raisonne par **double implication**.

Supposons *(i)* et montrons *(ii)*.

Réciproquement, *(ii)* et montrons *(i)*.

□

Par exemple, dans le cas de deux espaces vectoriels, on a la proposition suivante.

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et F, G deux s.e.v. de E. On a l'équivalence suivante.

$$\text{La somme } F + G \text{ est directe} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F \cap G = \{0\}.$$

Preuve. (D1) On raisonne par **double implication**.

Supposons que la somme $F + G$ est directe et montrons que $F \cap G = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{0\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe

□

Remarque : Cet énoncé peut s'adapter pour plusieurs sous-espaces vectoriels (cf proposition suivante).
Cependant, il est incorrect de dire que si $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0\}$ alors la somme $F + G + H$ est directe. Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $F = \text{Vect}\{(1,0)\}$, G $= \text{Vect}\{(0,1)\}$ et $H = \text{Vect}\{(1,1)\}$.
Il est clair que $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{(0,0)\}$.
Justifier pourtant que la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

Voici une généralisation possible de la proposition précédente mais qui n'est pas explicitement au programme.

Exercice de colle (E3)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $E_1, \ldots, E_n$ des s.e.v. de E. On a l'équivalence suivante.

$$\text{La somme } E_1 + \cdots + E_n \text{ est directe} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ E_i \cap \left(\sum_{j \neq i} E_j\right) = \{0\}.$$

On rappelle aussi la définition suivante et on la généralise à plusieurs sous-espaces vectoriels.

Définition 4

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. Soient F, G deux s.e.v. de E.
   On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E, si $E = F \oplus G$, autrement dit si pour tout vecteur u de E, il existe un unique $f \in F$ et un unique $g \in G$ tels que $u = f + g$.
   $$\forall u \in E,\ \exists! f \in F,\ \exists! g \in G : \quad u = f + g.$$
2. Soient $E_1, \dots, E_n$ des s.e.v. de E.
   On dit que $E_1, \dots, E_n$ sont **supplémentaires** dans E, si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$, autrement dit si pour tout vecteur u de E, il un unique $(u_1, \dots, u_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tels que $u = u_1 + \cdots + u_n$.
   $$\forall u \in E,\ \exists! (u_1, \dots, u_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n : \quad u = u_1 + \cdots + u_n.$$

La proposition 5 s'écrit alors :

Proposition 6

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et F, G deux s.e.v. de E. On a l'équivalence suivante.

$$E = F \oplus G \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E = F + G, \\ F \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Pour démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, on pourra utiliser un raisonnement par **analyse et synthèse**.

Exercice de colle (E1)

On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ son sous-ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires. On rappelle que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'ils sont supplémentaires.

Analyse :

Synthèse :

Exercice de colle (E2)

On note $E = \mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On désigne par $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$. C'est un sous-espace vectoriel de E. On se donne un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et on pose :

$$\mathbb{K}[X].P = \{Q.P,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

l'ensemble des multiples de P.

1. Montrer que $\mathbb{K}[X].P$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1$ soit le degré de P.
   Rappeler la définition de la division euclidienne d'un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ par le polynôme P.
   En déduire que $\mathbb{K}[X].P$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans E.

7.2 Familles de vecteurs

7.2.1 Familles libres, familles génératrices

On rappelle d'abord le cas des familles finies.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de E. On dit que :
• $\mathcal{F}$ est une famille libre (ou linéairement indépendante) si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \Big(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0\Big).$$

• $\mathcal{F}$ est une famille liée si :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

• $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E si :

$$\forall u \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E si $E =$vect$\{u_1, \dots, u_n\}$.

Exemple 7.3. *Soit $u \in E$. Montrer que :*

$\{u\}$ *est libre si et seulement si* $u \neq 0$.

Exemple 7.4. *Soient $u, v \in E$. Montrer l'équivalence suivante.*

$$\{u,v\} \text{ est liée} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u = \lambda v \\ \textit{ou} \\ v = 0. \end{array} \right.$$

Exemple 7.5. *On dit qu'une famille $\{P_1, \dots, P_N\}$ de $\mathbb{K}[X]$ est échelonnée en degrés si*

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_N).$$

Toute famille de polynômes non nuls, échelonnée en degrés est libre. En effet :

Exercice de colle (E1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $f_i : x \longmapsto e^{\alpha_i x}$.
Montrer que $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On montre ce résultat par récurrence sur n.

• **Initialisation :** Si $n = 1$, soit $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Alors $f_1 : x \longmapsto e^{\alpha_1 x}$ n'est pas la fonction nulle donc $\{f_1\}$ est libre.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat démontré pour ce n. On se donne des réels $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n+1}$. et on note $f_i : x \longmapsto e^{\alpha_i x}$. Montrons que $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

7.2.2 Bases

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On dira que $\mathcal{B}$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Exemple 7.6.
- *base canonique de* $\mathbb{K}^n$,
- $(1, X, \ldots, X^n)$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.

On rappelle alors la caractérisation suivante vue en première année.

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \quad u = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n.$$

Tout vecteur u de E s'écrit alors de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$. Le $n-$uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est appelé coordonnées (ou composantes) de u dans la base $\mathcal{B}$.

7.2.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On dira que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice finie, autrement dit, si l'on peut trouver des vecteurs $u_1, \ldots, u_p \in E$ tels que

$$E = \text{vect}\{u_1, \ldots, u_p\}.$$

Proposition 8

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel qui possède une famille génératrice finie $\mathcal{G} = (u_1, \ldots, u_n)$. Alors toute famille libre contenue dans $\mathcal{G}$ peut être complétée par des éléments de $\mathcal{G}$ en une base de E.

Et donc, de toute famille génératrice finie, on peut extraire une base. Ainsi, tout espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base. On rappelle les propositions suivantes.

Proposition 9

Dans tout espace vectoriel E de dimension finie, il existe au moins une base. Toutes les bases de E ont alors même cardinal, on appelle ce nombre dimension de E (notée $\dim(E)$).

La proposition 8 a pour conséquence directe les deux propositions suivantes.

Proposition 10 (Théorème de la Base Extraite)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

Proposition 11 (Théorème de la Base Incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Alors toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Exemple 7.7.
• $\dim(\mathbb{K}^n) = n$,
• $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$,
• $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$,
• $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace de dimension* 2,
• *on appelle rang d'une famille finie de vecteurs, la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent.*

$$rg\{u_1, \dots, u_p\} = \dim(vect\{u_1, \dots, u_p\}).$$

Proposition 12

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.
• Soient $u_1, \dots, u_p \in E$. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est libre alors $p \leqslant n$,
ou encore toute famille de cardinal au moins $n + 1$ est liée.
• Soient $u_1, \dots, u_p \in E$. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de E, alors $p \geqslant n$,
ou encore, il faut au moins $n = \dim(E)$ vecteurs pour engendrer E.
• Soit $e_1, \dots, e_n \in E$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \quad &\iff \quad (e_1, \dots, e_n) \text{ libre,} \\ &\iff \quad (e_1, \dots, e_n) \text{ génératrice de } E. \end{aligned}$$

Ainsi, les bases sont les familles libres de cardinal maximal ou encore les familles génératrices de cardinal minimal.

7.2.4 Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie, et l'on a

$$\dim(F) \leqslant \dim(E).$$

De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E qui vérifie $\dim(F) = \dim(E)$ alors on a $F = E$.

Application : Pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, il suffit de vérifier qu'ils ont même dimension et que l'un est inclus dans l'autre.

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.
Pour $i = 1, \dots, n$, on se donne des sous-espaces vectoriel E_i, chacun muni d'une base $\mathcal{B}_i = (e_1^{(i)}, \dots, e_{p_i}^{(i)})$. On a alors les équivalences suivantes.

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n \quad \iff \quad \mathcal{B} = (e_1^{(1)}, \dots, e_{p_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(n)}, \dots, e_{p_n}^{(n)}) \text{ est une base de } E.$$

Dans ce cas, on dira que $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

Preuve. On le montre sans restreindre la généralité, dans le cas de deux sous-espaces vectoriels F et G de E.
On se donne une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F et un base $(g_1, \dots, g_q)$ de G.

□

Proposition 15

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, et $E_1, \dots, E_n$ des s.e.v. de E dont la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe. On a l'égalité suivante.

$$\dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

En particulier, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, on a

$$\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Preuve.

□

Proposition 16

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $E_1, \dots, E_n$ des s.e.v. de E **en somme directe**. On a l'équivalence suivante.

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n \iff \dim(E) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

Preuve.

□

On s'intéresse plus précisément à la somme de deux espaces vectoriels.

Définition 8

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On dit que $\mathcal{B}$ est adaptée à F s'il existe un entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$ et $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F.

On admet les propositions suivantes.

Proposition 17

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est de dimension finie, alors il possède au moins un supplémentaire dans E.

Proposition 18 (Formule de Grassman)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Proposition 19

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de **dimension finie** et F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. On a les équivalences suivantes.

$$E = F \oplus G \iff \left\{ \begin{array}{l} F \cap G = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} F + G = E \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{array} \right.$$

On donne enfin la proposition suivante.

Proposition 20

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimension finie alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_p).$$

7.3 Applications linéaires

7.3.1 Définitions

Définition 9

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et une application $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est une application linéaire si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1. $\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$
2. $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires, c'est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
On appelle forme linéaire une application linéaire de E dans $\mathbb{K} = F$, et endomorphisme une application linéaire de E dans $E = F$.
On notera $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, on dira que f est un isomorphisme de E sur F, ou que E et F sont isomorphes. On appelle automorphisme de E, un endomorphisme de E qui est bijectif. On notera $\mathcal{GL}(E)$ l'espace vectoriel des automorphismes de E.

Exemple 7.8. *La dérivation est une application linéaire, l'intégration également puisque :*

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad \textit{et} \qquad \int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$$

Exemple 7.9. *La spécialisation est une forme linéaire. En effet, on se place par exemple sur $E = \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit $a \in I$. Montrer que l'application $\varphi : \ f \in E \longmapsto f(a)$ est une forme linéaire.*

Définition 10

Soient E et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
On appelle **noyau** de f l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$. Ainsi :

$$\forall x \in E : \qquad x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0.$$

On appelle **image** de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E, y = f(x)\}$. Ainsi :

$$\forall y \in F : \qquad y \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists x \in E, y = f(x).$$

Proposition 21

Soient E et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve.

□

Proposition 22

Soient E et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a les équivalences suivantes.

$$f \text{ est injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\}, \iff \Big(\forall x \in E,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0\Big)$$

$$f \text{ est surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F$$

Preuve.

□

7.3.2 Polynômes d'endormorphismes

Définition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un **endomorphisme** de E.

- On pose $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.
- Si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(u) = a_0u^0 + a_1u^1 + \cdots a_nu^n = a_0\mathrm{Id}_E + a_1u + \cdots a_nu^n$.

On remarque que u^k et $P(u)$ sont des endomorphismes de E.

Définition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (endomorphisme nul).

Par exemple, on reverra qu'une symétrie s verifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ ou encore $s^2 - \mathrm{Id}_E = 0$.
Ainsi $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s.

On peut démontrer la proposition suivante.

Proposition 23

Soit E un$\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$,
- Et comme $P \times Q = Q \times P$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ (i.e. les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent).
- Si P est un polynôme annulateur de u, alors tous ses multiples le sont aussi.

Application au calcul de puissance :

Exercice de colle (E2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u^n comme combinaison linéaire de u et de Id_E.

Idée : On veut trouver « combien » on peut prendre de $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E$ dans u^n, ou encore « combien » on peut prendre de $X^2 - 3X + 2$ dans X^n. En fait, c'est surtout ce qu'il « reste » qui nous intéresse.

Proposition 24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par u.

Preuve.

$\square$

7.3.3 Liens avec les familles de vecteurs

On rappelle les propositions suivantes.

Proposition 25

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, dont on choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad f(e_i) = f_i.$$

Autrement dit, une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par la donnée de l'image des vecteurs d'une base de E.

Proposition 26

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
2. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a :
   - f est surjective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F et dans ce cas on a $n = \dim(E) \geqslant \dim(F)$.
   - f est injective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F et dans ce cas $n = \dim(E) \leqslant \dim(F)$.
   - f est un isomorphisme $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Application : Deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension. Et donc, tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

On rappelle également la proposition suivante.

Proposition 27

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies. Alors on a

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F),$$

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

7.3.4 Formule du rang

Définition 13

Soient E et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ quand elle est finie. On note $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 28 (Formule du rang)

Soient E et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E.

1. La restriction de f à G définit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(f)$.
2. En conséquence, on a $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Preuve. (D2)

□

On remarque que si F est de dimension finie, alors $\text{rg}(f) \leqslant \dim(F)$, avec égalité si et seulement si f est surjective. De même, on a $\text{rg}(f) = \dim(\text{vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si f est injective.

Proposition 29 (Caractérisation des Isomorphismes)

Soient E et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de **même dimension finie** $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{array}{lcl} f \text{ est un isomorphisme} & \iff & f \text{ est injective} \\ & \iff & f \text{ est surjective} \\ & \iff & \text{rg}(f) = n \end{array}$$

Proposition 30

Soient E, F, G des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a les asssertions suivantes.

- $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\text{rg}(f), \text{rg}(g)\}$.
- Si f est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g) = \text{rg}(g \circ f)$.
- Si g est un isomorphisme, alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f)$.

Preuve.
• On a d'abord $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$, donc $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}(g)$.
De même, $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(g \circ f))$. Et par la formule du rang, on obtient :

$$\dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(E) - \dim(\text{Im}(g \circ f))$$

On a bien aussi $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}(f)$.

• On suppose que f est un isomorphisme (la surjectivité suffit). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E alors :
Puisque f est un isomorphisme $(e'_1, \ldots, e'_n) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F et donc

$$\begin{aligned} \text{rg}(g \circ f) &= \text{rg}(g(f(e_1)), \ldots, g(f(e_n))) \qquad \text{(par définition du rang de } f) \\ &= \text{rg}(g(e'_1), \ldots, g(e'_n)) \ = \ \text{rg}(g) \qquad \text{(par définition du rang de } g) \end{aligned}$$

• On suppose que g est un isomorphisme (l'injectivité suffit). Soit H un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E. On se donne une base adaptée à la somme directe $E = H \oplus \text{Ker}(f)$:

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \ \ldots \ , e_p}_{\text{base de } H}, \ \underbrace{e_{p+1}, \ \ldots \ , e_n}_{\text{base de } \text{Ker}(f)}).$$

Alors, on a $\text{rg}(f) = p = \dim(H)$.
D'autre part, $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g(f(e_1)), \ldots, g(f(e_p)), g(\underbrace{f(e_{p+1})}_{=0}), \ldots, g(\underbrace{f(e_n)}_{=0})) = \text{rg}(g(f(e_1)), \ldots, g(f(e_p))$.
Et comme $(f(e_1)), \ldots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ et qu'elle est de cardinal $p = \dim(\text{Im}(f))$, c'en est une base de $\text{Im}(f)$.
Par conséquent, $(f(e_1)), \ldots, f(e_p))$ est une famille libre et puisque g est injective, son image par g l'est aussi. Son rang est donc son cardinal, c'est-à-dire p.
On a donc finalement :

$$\text{rg}(f) = p = \text{rg}(g(f(e_1)), \ldots, g(f(e_p)) = \text{rg}(g \circ f).$$

$\square$

Remarque : Extrait de Centrale PSI maths 1 2023. *Démontrer que, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM$ conserve le rang.*

7.3.5 Projecteurs et symétries

Définition 14

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$.
2. Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle **projection** sur F dans la direction de G l'application suivante.

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array} \right.$$

Illustration graphique :

Proposition 31

Une projection est une application linéaire.

Preuve.

□

Proposition 32

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. Soit p un projecteur de E. Alors $E =$Im$(p)\oplus$Ker(p) et p est la projection sur Im(p) dans la direction de Ker(p).
2. Si $E = F \oplus G$ et si p est la projection sur F dans la direction de G alors p est un projecteur et on a :

$$F = \mathrm{Im}(p) \text{ et } G = \mathrm{Ker}(p).$$

Preuve.

□

Exemple 7.10. *Soit E un espace vectoriel de E, montrer que si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de E alors :*

$$\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id_E - p) = \mathrm{Ker}(p - Id_E).}$$

Méthode 1 : en utilisant la caractérisation des projecteurs.
Avec les notations précédentes, on a $x_G = x - x_F = (Id_E - p)(x)$. Ainsi, si p est la projection sur F dans la direction de G alors $Id_E - p$ est la projection sur G dans la direction de F (et réciproquement).
En particulier, on a $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id_E - p)$.

Méthode 2 : par double inclusion.

Exemple 7.11. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur de E. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Ecrire la matrice de p dans cette base et vérifier que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.*

Exercice de colle (E1 - Méthode à connaître)

On note $E = \mathbb{R}^3$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de E.

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}\{(1, 2, 1)\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G$ et déterminer la matrice dans la base canonique de E, de la projection p sur F dans la direction de G.

Définition 15

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. On appelle **endomorphisme involutif** de E tout endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $s \circ s = I_E$.
2. Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur $x \in E$ sécrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

   On appelle **symétrie** par rapport à F dans la direction de G l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$

Illustration graphique :

On pourrait démontrer les énoncés suivants.

Proposition 33

Une symétrie est une application linéaire.

Proposition 34

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. Soit s un endomorphisme involutif de E. Alors $E =$Ker$(s - I_E)\oplus$Ker$(s + I_E)$ et s est la symétrie par rapport à Ker$(s - I_E)$ dans la direction de Ker$(s + I_E)$.
2. Si $E = F \oplus G$ et si s est la symétrie par rapport à F dans la direction de G alors s est un endomorphisme involutif et on a :

$$F = \text{Ker}(s - I_E) \text{ et } G = \text{Ker}(s + I_E).$$

Avec les notations précédentes, si p est la projection sur F dans la direction de G et si s est la symétrie par rapport à F dans la direction de G, alors on a la relation suivante entre p et s (à savoir retrouver rapidement !).

$$s = 2p - Id_E$$

En effet : pour tout $x = x_F + x_G \in E$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, on a les égalités suivantes.

Exemple 7.12. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n. On suppose que $E = F \oplus G$ et on se donne une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme directe.*
Ecrire la matrice dans cette base de la symétrie s par rapport à F dans la direction de G.

7.4 Hyperplans

Définition 16

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 35 (MPSI)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On a l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} F \text{ est un hyperplan de } E &\underset{\text{définition}}{\Longleftrightarrow} F \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle} \\ &\Longleftrightarrow F \text{ admet une droite vectorielle pour supplémentaire dans } E \end{aligned}$$

Preuve. Soit F un hyperplan de E. Alors, par définition, il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Puisque $\varphi \neq 0$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$.
On montre, par analyse et synthèse, que $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}\{x_0\}$.

Réciproquement : Si $E = F \oplus D$ avec D droite vectorielle. Alors il existe $x_0 \in E$ non nul tel que $D = \text{Vect}\{x_0\}$.

$\square$

Proposition 36 (MPSI - PCSI)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de **dimension finie** n et F un sous-espace vectoriel de E. On a l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} F \text{ est un hyperplan de } E \quad & \underset{\text{définition}}{\Longleftrightarrow} \quad F \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle} \\ & \Longleftrightarrow \quad F \text{ admet une droite vectorielle pour supplémentaire dans } E \\ & \Longleftrightarrow \quad \dim(F) = n - 1 \end{aligned}$$

Corollaire 1

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si x est un vecteur de E, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Tout hyperplan de E admet une équation du type

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0.$$

Cette équation est unique à un scalaire multiplicatif près.

Preuve.

□

Exemple 7.13. *Dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont les plans.*
Par exemple, $H : x - 2y + z = 0$ est l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

7.5 Annexe

7.5.1 Polynômes de Lagrange

Proposition 37

Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts. L'application suivante est un isomorphisme.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big) \end{array} \right.$$

Preuve.(E1)

□

Proposition 38

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts. Il existe une unique base $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2, \qquad L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Cette base est appelée base de Lagrange associée aux scalaires $a_0, \dots, a_n$, et on a : $\forall i \in [\![0,n]\!],\ L_i(X) = \prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \dfrac{X - aj}{a_i - a_j}$.

Preuve.

□

Exercice de colle (E1)

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts et $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ la base de Lagrange associée à $a_0, \dots, a_n$.

1. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
2. Reconnaitre $L_0(X) + \cdots + L_n(X)$ et $a_0 L_0(X) + \cdots + a_n L_n(X)$

7.5.2 Pour aller plus loin (Hors-Programme)

Exercice de colle (E3)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'implication suivante *(La réciproque est évidente).*

$$\Big(\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \underbrace{\forall x \in E, u(x) = \lambda x}_{\text{i.e } u=\lambda \mathrm{Id}_E}\Big)$$