Chapitre 6

Intégrales impropres (ou généralisées)

6.1 Convergence d'une intégrale impropre

6.1.1 Intégrale sur $]a, b]$ ou sur $[a, b[$

Définition 1

• Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si

$$\int_a^x f(t)dt \text{ admet une limite finie lorsque } x \longrightarrow b^-.$$

On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^{\to b} f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$

• De manière analogue, soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si

$$\int_x^b f(t)dt \text{ admet une limite finie lorsque } x \longrightarrow a^+.$$

On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_{\to a}^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt.$

• On dira qu'une intégrale impropre diverge si elle n'est pas convergente.

Exemple 6.1. *Convergence et calcul de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$.

Exemple 6.2. *Intégrales de Riemann* **(à connaître)**.

• *Nature de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1$$

• *Nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1$$

Exemple 6.3. *Convergence et calcul de* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ **(à connaître)**.

$$\int_0^1 \ln(t)dt \text{ converge.}$$

Exemple 6.4. *Nature et calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ **(à connaître)**.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt \text{ converge} \iff \alpha > 0}$$

6.1.2 Intégrale « faussement » impropre

Proposition 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On suppose que f est prolongeable par continuité en b :

$$\exists \ell \in \mathbb{K}, \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \ell.$$

Alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^{\to b} f(t)dt$ est convergente.
On a un résultat analogue pour une intégrale sur $]a, b]$ avec a et b réels.

Preuve. On montre ce résultat pour f continue sur $[a, b[$. Le cas général sera obtenu grâce aux théorèmes de comparaison.

□

Remarque importante :

Cet énoncé n'a pas de sens avec $b = +\infty$ (ou $a = -\infty$).
On ne peut en effet pas dans ce cas prolonger la fonction f par continuité.

Exemple 6.5. *Nature de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$.

6.1.3 Intégrale sur $]a,b[$

Définition 2

Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux et $c \in]a,b[$. On dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si les deux suivantes intégrales sont convergentes.

$$\int_a^c f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)dt$$

On **pose alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Remarque : Par la relation de Chasles, cette définition ne dépend pad du choix de $c \in]a,b[$.

Exemple 6.6. *Nature de* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx$.

Exemple 6.7. *Nature et calcul de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Exemple 6.8. *Nature de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

6.1.4 Intégration par parties

Quand on veut effectuer une intégration par parties dans une intégrale impropre, on doit :

- revenir à une intégrale sur un segment puis passer à la limite,

ou

- effectuer directement l'intégration par partie dans l'intégrale impropre en utilisant la proposition ci-dessous. On vérifiera dans ce cas soigneusement les hypothèses requises.

Exemple 6.9. *Nature et calcul de* $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)dt$.

Proposition 2 (Intégration par parties dans une intégrale impropre)

Soient $u, v : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $u(t)v(t)$ admet une limite finie quand t tend vers b :

$$\exists \ell \in \mathbb{K}, \qquad \lim_{t\to b^-} u(t)v(t) = \ell.$$

Alors on a l'équivalence suivante.

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_a^b u'(t)v(t)dt \text{ converge.}$$

Et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^{\to b} - \int_a^b u'(t)v(t)dt = \lim_{t\to b^-} u(t)v(t) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt$.
On dispose d'un résultat analogue pour une intégrale sur $]a, b]$.

Exemple 6.10. *Nature et calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$.

6.1.5 Changement de variable

Quand on veut effectuer un changement de variable dans une intégrale impropre, on doit :

- revenir à une intégrale sur un segment puis passer à la limite,

ou

- effectuer directement le changement de variable dans l'intégrale impropre en utilisant la proposition ci-dessous. On vérifiera dans ce cas soigneusement les hypothèses requises.

Exercice de colle (E1)

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et la calculer.

Proposition 3 (Changement de variable dans une intégrale impropre)

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow]a, b[= \varphi(]\alpha, \beta[)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone (ou encore de classe $\mathcal{C}^1$ et réalisant une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[= \varphi(]\alpha, \beta[)$). Si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ est continue, on a l'équivalence suivante.

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du \text{ converge} \iff \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

Et dans ce cas, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)|\varphi'(u)|du = \int_a^b f(t)dt$.

Remarque : La valeur absolue dans $|\varphi'(u)|$ permet de compenser l'inversion des bornes quand φ est décroissante.

- si φ est croissante :
- si φ est décroissante :

Exercice de colle (E1)

Retrouver la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Remarque : Pour les changement de variable affines ($u = at+b$ avec $a \neq 0$), on pourra appliquer directement le changement de variable (à condition que l'intégrale converge).

6.1.6 Intégrales à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, on définit $\mathrm{Re}(f) : x \in I \longmapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \in I \longmapsto \mathrm{Im}(f(x))$.
On admet la proposition suivante.

Proposition 4

Si $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux, on a l'équivalence suivante.

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge } \iff \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt \text{ et } \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt \text{ convergent}$$

Et dans ce cas, on a l'égalité $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt$.
On a un énoncé analogue pour intégrale sur $]a, b]$.

6.2 Intégrales de fonctions positives

6.2.1 Monotonie

On suppose que $a < b \leqslant +\infty$ et on se donne une fonction $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ positive et continue par morceaux. On considère la fonction F suivante.

$$F : x \in [a, b[\longrightarrow \int_a^x f(t)dt.$$

Alors : $\boxed{F \text{ est croissante.}}$

En effet :

Ainsi, par le **théorème de la limite monotone**, deux cas se présentent.

- F est majorée et dans ce cas, $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to b} F(x) = \ell$.
- F n'est pas majorée et dans ce cas, $\lim\limits_{x\to b} F(x) = +\infty$.

Proposition 5

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et **positive**. On a les équivalences suivantes.

$$\int_a^{\to b} f(t)dt \text{ converge} \iff x \longmapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée.}$$

$$\int_a^{\to b} f(t)dt \text{ diverge} \iff \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt = +\infty.$$

6.2.2 Théorèmes de comparaison

Proposition 6

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux et **positives**.

1. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que $\forall t \in [c, b[,\ f(t) \leqslant g(t)$ (ce qui est le cas lorsque $f(t) = \underset{t\to b}{o}(g(t))$). Alors :
$$\int_a^{\to b} g(t)dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^{\to b} f(t)dt \text{ converge}$$
$$\int_a^{\to b} f(t)dt \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^{\to b} g(t)dt \text{ diverge} \qquad \text{(contraposée)}$$
2. On suppose que $f(t) = \underset{t\to b}{O}(g(t))$. Alors :
$$\int_a^{\to b} g(t)dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^{\to b} f(t)dt \text{ converge}$$
3. On suppose que $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$. Alors :
$$\int_a^{\to b} g(t)dt \text{ converge} \iff \int_a^{\to b} f(t)dt \text{ converge}$$

Preuve. On montre seulement 1.

$\square$

Remarques : Cet énoncé est encore valable si f est seulement positive, ou de signe constant (adapter les inégalités !) au voisinage de b. On peut également donner un énoncé analogue pour une intégrale sur $]a, b]$.

6.2.3 Exemple : Un grand classique à savoir refaire les yeux fermés !

Exercice de colle (E1)

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

6.2.4 Exemple : Intégrales de Bertrand

Attention : Les intégrales de Bertrand ne sont pas au programme de PSI et les résultats qui suivent ne pourront pas être utilisés directement. Il faut savoir, sans hésitation, déterminer la nature d'une telle intégrale.

• **Intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$:**

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ est impropre au voisinage de $+\infty$.
Il faut **savoir démontrer** que

- Si $\alpha > 1$, $I(\alpha, \beta)$ converge : on compare $f(t)$ à $\dfrac{1}{t^\gamma}$ avec $\alpha > \gamma > 1$.
- Si $\alpha < 1$, $I(\alpha, \beta)$ diverge : on compare $f(t)$ à $\dfrac{1}{t}$.
- Si $\alpha = 1$, $I(1, \beta)$ converge si et seulement si $\beta > 1$: on revient à la définition et on calcule $\displaystyle\int_2^{X} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}$.

Exercice de colle (E1)

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ est convergente, puis à l'aide d'un changement de variable, qu'elle vaut 0.

Exemple 6.11. *Nature de* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2(t)}$.

Exemple 6.12. *Nature de* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t\ln(t)+2}dt$.

•**Intégrales de Bertrand au voisinage de** 0 **:** On adapte les raisonnements précédents.

Exercice de colle (E2)

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}t^x dt$ en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}$.

6.2.5 Intégrale de Riemann « translatée »

Soit a, b deux réels tels que $a < b$. On s'intéresse à la nature de $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$.
Soit $X \in]a, b]$. On a

$$\int_X^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \underset{u=t-a}{=} \int_{X-a}^{b-a} \frac{du}{u^\alpha}.$$

Lorsque $X \longrightarrow a$, on a $X - a \longrightarrow 0$, et donc il s'agit d'une intégrale de Riemann en 0. Ainsi, on a l'équivalence suivante.

$$\boxed{\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1.}$$

De même, si $a < b$ on a

$$\boxed{\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1.}$$

Exercice de colle (E2)

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(t)dt$.

6.3 Intégrales absolument convergentes

6.3.1 Définition

Définition 3

Soit $I = [a,b[,]a,b]$ ou $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un segment et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Remarque 1 : Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont absolument convergentes, puisque

$$0 \leqslant |\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda|.|f| + |\mu|.|g|$$

par les théorèmes de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |\lambda f(t) + \mu g(t)|dt$ converge et donc $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt$ est absolument convergente.
Ainsi l'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur $[a,b[$ et dont l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergentes est un sous-espace vectoriel (il est évidemment non vide) de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux.

Remarque 2 : Si f est à valeurs complexes, notons $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$.
On a d'une part, $|\mathrm{Re}(f)| \leqslant \sqrt{|\mathrm{Re}(f)|^2 + |\mathrm{Im}(f)|^2} = |f|$ et $|\mathrm{Im}(f)| \leqslant \sqrt{|\mathrm{Re}(f)|^2 + |\mathrm{Im}(f)|^2} = |f|$.
Donc si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergentes alors $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt$ le sont aussi.
D'autre part, $|f| = \sqrt{|\mathrm{Re}(f)|^2 + |\mathrm{Im}(f)|^2} \leqslant |\mathrm{Re}(f)| + |\mathrm{Im}(f)|$ et donc si $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt$ sont absolument convergentes alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ l'est aussi. On a donc la proposition suivante.

Proposition 7

Soit $I = [a,b[,]a,b]$ ou $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un segment et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On a :

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge absolument} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt \text{ et } \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt \text{ convergent absolument}$$

6.3.2 Nature

Proposition 8

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.
On a un énoncé analogue pour des intégrales sur $]a, b]$ ou sur $]a, b[$.

Preuve. • Si f est à valeurs réelles, on note pour $t \in [a, b[$, $f^+(t) = \max(f(t), 0)$ et $f^-(t) = \min(f(t), 0)$.
Alors $f = f^+ + f^-$ et $|f| = f^+ - f^-$. Puisque $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$, et $0 \leqslant -f^- \leqslant |f|$, et puisque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge, par comparaison, $\displaystyle\int_a^b f^+(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f^-(t)dt$ convergent et par linéarité, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge aussi.
• Si f est à valeurs complexes, il suffit d'utiliserla remarque 2 ci-dessus, et le premier point avec $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. □

Application : Pour démontrer la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, on peut étudier sa convergence absolue et appliquer les théorèmes de comparaison à $|f| \geqslant 0$.

Exemple 6.13. *Nature de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}}dt$.

Remarque : Attention, la réciproque est fausse. Il existe des intégrales convergentes mais qui ne convergent pas absolument. Ces intégrales sont dites **semi-convergentes** (cette notion est hors-programme).

Exercice de colle (E1 - Intégrale de Dirichlet)

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

On verra en annexe que cette intégrale n'est pas absolument convergente.

6.4 Fonctions intégrables

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$I = [a, b],\ \ ]a, b],\ \ [a, b[\ \text{ ou }]a, b[.$$

6.4.1 Définition

Définition 4

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ un fonction. On dit que f est intégrable sur l'intervalle I si

- $I = [a, b]$ est un segment et f est continue par morceaux sur I,

ou

- I n'est pas un segment, f est continue par morceaux sur I et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument** convergente.

Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_I f = \int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Il faut utiliser correctement le vocabulaire mathématique. Cela n'a aucun sens de dire que $\displaystyle\int_I f(t)dt$ est intégrable... Il y a d'ailleurs une analogie (en fait, il s'agit d'une seule et même notion) entre série et intégrale :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable	f est intégrable sur I
$\sum \lvert u_n\rvert$ converge	$\displaystyle\int_I \lvert f(t)\rvert dt$ converge

Remarque 1 : Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ et si $c \in [a, b[$, par la relation de Chasles, l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ est équivalente à l'intégrabilité de f sur $[c, b[$.
On dira dans ce cas que f est intégrable **au voisinage** de b (ou de b^- pour être plus précis).

Ainsi, par un changement de variable affine, on démontrerait les équivalences suivantes.

Proposition 9

Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

- $x \longmapsto f(x)$ est intégrable au voisinage de a^+ si et seulement si $t \longmapsto f(a+t)$ est intégrable au voisinage de 0^+,
- $x \longmapsto f(x)$ est intégrable au voisinage de b^- si et seulement si $t \longmapsto f(b-t)$ est intégrable au voisinage de 0^+.

Remarque 2 : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de **signe constant**, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)dt$ est équivalente à sa convergence absolue, et donc aussi à l'intégrabilité de f sur I.

Ainsi, certains exemples d'intégrales convergentes vus précédemment, ce traduisent en terme d'intégrabilité.
On pourra utiliser, sans les redémontrer, les résultats suivants.

Proposition 10 (Fonctions de référence)

$$t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha} \text{ est intégrable au voisinage de } +\infty \iff \alpha > 1$$

$$t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha} \text{ est intégrable au voisinage de } 0 \iff \alpha < 1$$

$$t \longmapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha} \text{ est intégrable au voisinage de } a \iff \alpha < 1$$

$$t \longmapsto e^{-\alpha t} \text{ est intégrable au voisinage de } +\infty \iff \alpha > 0$$

$$t \longmapsto \ln(t) \text{ est intégrable au voisinage de } 0$$

Exemple 6.14. *L'exemple qui suit est très classique mais le résultat n'est pas explicitement au programme.*

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.
La fonction f *est continue sur* $[0, +\infty[$ *et*

$$\int_0^X |f(t)|dt = \int_0^X \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^X = \mathrm{Arctan}(X) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Donc f *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ *et* $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Par parité, on montrerait aussi que $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ *est intégrable sur* $]-\infty, 0[$ *et que* $\displaystyle\int_{]-\infty,0]} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

6.4.2 Théorèmes de comparaison

Les théorèmes de comparaison vus pour les fonctions positives s'écrivent aussi pour les fonctions intégrables.

Proposition 11

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux.

1. On a :

$$\left.\begin{array}{l} |f| \leqslant g \text{ sur } I \\ g \text{ intégrable sur } I \end{array}\right\} \implies f \text{ intégrable sur } I.$$

2. On suppose que $I = [a, b[$.

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = \underset{t \to b^-}{o}(g(t)) \\ g \text{ intégrable au voisinage de } b \end{array}\right\} \implies f \text{ intégrable au voisinage de } b.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = \underset{t \to b^-}{O}(g(t)) \\ g \text{ intégrable au voisinage de } b \end{array}\right\} \implies f \text{ intégrable au voisinage de } b.$$

3. On suppose que $I = [a, b[$ et que $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$. On a :

$$f \text{ intégrable au voisinage de } b \iff g \text{ intégrable au voisinage de } b.$$

On dispose d'énoncés analogue pour des intervalles du type $]a, b]$.

Exemple 6.15. *Montrer que* $f : t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t(1+t^2)}$ *est intégrable sur* $]0, +\infty[$.

6.4.3 Propriétés

Proposition 12 (Linéarité)

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ intégrables sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Alors, $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I et

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

Définition 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ qui sont intégrables sur I.
D'après ce qui précède, $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Proposition 13 (Intégrabilité sur $J \subset I$)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I.
Si f est intégrable sur I alors elle l'est sur tout intervalle $J \subset I$.

Proposition 14 (Inégalité triangulaire)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I. Si f est intégrable sur I alors $|f|$ l'est aussi et on a

$$\left| \int_I f(t)dt \right| \leqslant \int_I |f(t)|dt.$$

Proposition 15 (Relation de Chasles)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ intégrable sur I.
Si a, b, c sont des points ou des extrémités de I, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Proposition 16 (Intégrale d'une fonction continue)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ $\boxed{\textbf{continue}}$, **positive** et **intégrable** sur I. On a

$$\int_I f(t)dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall t \in I,\ f(t) = 0.$$

Preuve. En effet, pour tout segment $[a, b]$ contenu dans I, on a par positivité de l'intégrale et par la relation de Chasles :

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_I f(t)dt = 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$, et comme $t \longmapsto f(t)$ est continue et positive sur $[a, b]$, elle y est identiquement nulle. En conclusion, f est nulle sur tout segment contenu dans I donc f est nulle sur I. $\square$

6.5 Intégrales dépendant d'un paramètre

6.5.1 Le paramètre est dans les bornes de l'intégrale

On cherche à étudier des fonctions G définies par $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.

• Cas d'une intégrale sur un segment :

On rappelle le théorème fondamental de l'analyse.

Proposition 17 (Théorème fondamental)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** et a un point de I. Alors la fonction F_a définie sur I par

$$\forall x \in I,\ F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est **la** primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout $x \in I$ on a $F_a'(x) = f(x)$ et $F_a(a) = 0$.

La variable x peut apparaître dans une borne ou dans les deux.

- On suppose que $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est **continue** sur I, que $a \in I$ et que pour tout $x \in J$, on a $u(x) \in I$. On définit l'application G par
$$G(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt.$$
Soit F une primitive de f sur I, alors pour tout $x \in J$, on a $G(x) = F(u(x)) - F(a)$.
Ainsi, on est ramené à l'étude d'une fonction composée.

- On suppose que $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est **continue** sur I et que pour tout $x \in J$, on a $u(x) \in I$ et $v(x) \in I$. On définit l'application G par
$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$
Soit F une primitive de f sur I. Alors pour tout $x \in J$, on a $G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.

Exercice

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle est impaire.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$.
3. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
4. A l'aide d'un encadrement judicieux, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$.

• **Cas d'une intégrale impropre :**

On s'intéresse ici à G fonction définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ où la fonction f est continue sur un intervalle I, mais où l'intégrale $G(x)$ est impropre en a (extrémité de I).

Idée : On se donne $b \in I$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^x f(t)dt = \underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{\text{constante}} + \underbrace{\int_b^x f(t)dt}_{\text{intégrale sur un segment}} .$$

On est donc ramené au cas précédent.

Exercice

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Justifier l'existence de $F(x)$ pour $x > 0$. La fonction F est-elle définie en 0 ?
2. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
3. Déterminer les limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} xF(x)$.
4. Sans exprimer $F(x)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)dt$ existe et calculer sa valeur.

6.5.2 Le paramètre est sous le signe d'intégration

On se donne une fonction f de deux variables réelles et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right. \qquad A, I \text{ intervalles de } \mathbb{R}.$$

On suppose que pour tout $x \in A$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

À tout x de A, on peut donc associer l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)dt$ et considérer la fonction suivante.

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)dt \end{array} \right.$$

Si la fonction f possède certaines propriétés (continuité, dérivabilité, limite par rapport à la variable x), qu'en est-il de la fonction g? Parfois, on pourra calculer explicitement $g(x)$. D'autres fois, on pourra, sous certaines hypothèses, vérifier que g est continue, dérivable et exprimer sa dérivée g' sous la forme d'une intégrale.

4.5.2.1 Continuité :

Proposition 18 (Théorème de continuité sous le signe intégrale)

Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$.
On considère une fonction numérique f de deux variables définie sur $A \times I$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t). \end{array} \right.$$

On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées.

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,
2. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
3. Hypothèse de domination : Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors, la fonction $g : x \in A \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

Exemple 6.16. *Étudier la continuité de l'application* $g_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \sin(xt^2)dt$.

Remarque : Si on ne parvient « à dominer » la fonction f sur tout l'intervalle A, on peut remplacer l'hypothèse de domination par :
3'. Hypothèse de domination restreinte : pour tout segment $J \subset A$, *il existe une fonction* $\varphi_J : I \to \mathbb{R}$ *intégrable sur* I *telle que*

$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_J(t).$$

Exemple 6.17. *Étudier la continuité de l'application* $g_2 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x}dt$ *sur* $]0, +\infty[$.

Remarque : L'hypothèse de domination est essentielle.

Exemple 6.18. *Étudier la continuité de* $g_3 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}dt$.

4.5.2.2 Limites :

En revenant à la définition de continuité en $x_0 \in A$, le théorème de continuité sous le signe intégrale permet, sous certaines hypothèses, de conclure que pour tout $x_0 \in A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ ou encore :

$$\lim_{x \to x_0} \int_I f(x,t)dt = \int_I f(x_0,t)dt = \int_I \underbrace{\left(\lim_{x \to x_0} f(x,t)\right)}_{=f(x_0,t)} dt.$$

Cela revient à permuter le signe $\int$ et le signe lim. Le théorème suivant permet d'étendre ce résultat lorsque x tend vers une extrémité de A.

Proposition 19 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu)

Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et a une extrémité de A.
On considère une fonction numérique f de deux variables définie sur $A \times I$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t). \end{array} \right.$$

On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées.

1. Pour tout $t \in I$, on a $f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$,
2. Pour tout $x \in A$, les fonction $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I,
3. Hypothèse de domination : Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors, la fonction ℓ est intégrable sur I et on a :

$$\int_I f(x,t)dt \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)dt.$$

Remarque : cette limite s'écrit aussi $\lim\limits_{x \to a} \displaystyle\int_I f(x,t)dt = \int_I \underbrace{\left(\lim_{x \to a} f(x,t) \right)}_{= \ell(t)} dt.$

Exemple 6.19. *Justifier l'existence de* $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \frac{\ln(t)}{t-1} dt$ *pour* $x > 0$ *et déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Ce théorème peut être utile, mais avant de s'engager dans sa rédaction (assez fastidieuse), on essaiera d'abord d'explorer des pistes utilisant des encadrements.

Exemple 6.20. *On a vu que* $G(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln(t)} dt$ *existe pour* $x > -1$*. Déterminer* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x)$.

Méthode 1 : avec une majoration explicite

Méthode 2 : à l'aide de propriétés qualitatives

Exercice de colle (E1)

Soit $f : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ lorsque :

1. f est bornée.
2. f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

4.5.2.3 Dérivabilité :

Proposition 20 (Théorème de dérivation sous le signe intégrale)

Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$.
On considère une fonction numérique f de deux variables définie sur $A \times I$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t). \end{array} \right.$$

On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées.

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, c'est-à dire que $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est définie et continue sur A.
2. Pour tout $x \in A$:
   - la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
   - la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
3. Hypothèse de domination : Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors, la fonction $g : x \in A \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et on a : $\quad \forall x \in A, \quad g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$

Exemple 6.21. *Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}dt$.*
Montrer que g est dérivable sur D_g, calculer g' et en déduire g.

Remarque : Comme pour la continuité, si on ne parvient « à dominer » la fonction f sur tout l'intervalle A, on peut remplacer l'hypothèse de domination par :
3'. Hypothèse de domination restreinte : pour tout segment $J \subset A$, il existe une fonction $\varphi_J : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi_J(t).$$

4.5.2.4 Dérivées successives :

Proposition 21

Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$.
On considère une fonction numérique f de deux variables définie sur $A \times I$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t). \end{array} \right.$$

On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées.

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A,
2. Pour tout $x \in A$, pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I,
3. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
4. Hypothèse de domination : il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors, la fonction $g : x \in A \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et, pour tout $p \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$\forall x \in A, \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)dt.$$

Remarque 1 : Là encore, si c'est nécessaire, on peut remplacer l'hypothèse de domination par :
3'. Hypothèse de domination restreinte : pour tout segment $J \subset A$, il existe une fonction $\varphi_J : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi_J(t).$$

Remarque 2 : Si l'on veut adapter le théorème et montrer de la classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de vérifier 1, et de montrer 3. et 4. pour toutes les dérivées successives.

6.6 Annexe

6.6.1 Fonction Gamma d'Euler

On définit la fonction Γ d'Euler par : $\forall x > 0, \qquad \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$

1. **(E1)** Montrer que l'ensemble de définition de la fonction Γ est (exactement) $]0, +\infty[$.

2. **(E1)** Justifier que la fonction Γ est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

3. **(E2)** Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

4. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

5. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

6.6.2 Équivalents d'intégrales

On considère ici des intégrales dépendant d'un paramètre n entier, ou encore x réel. On veut obtenir des informations sur leur comportement lorsque n tend vers $+\infty$, ou x tend vers $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: limites, équivalents, développements asymptotiques...

Il n'y a pas de recette toute faite, il faut avant tout s'entraîner, prendre le temps de chercher, d'explorer différentes pistes.

On peut par exemple :

- utiliser des encadrements et la positivité de l'intégrale,
- utiliser le théorème de convergence dominée,
- effectuer un changement de variable ou une intégration par parties et reprendre les deux premiers points avec la nouvelle intégrale,
- effectuer une intégration par parties et montrer que l'on peut négliger un terme devant l'autre.
- utiliser la relation de Chalses et montrer que l'on peut négliger un terme devant l'autre,
- utiliser une équation fonctionnelle et un argument de continuité ...

Parfois, il existe plusieurs solutions complètement différentes. On peut aussi utiliser plusieurs de ces points dans une même résolution.

Par encadrement ou avec une intégration par parties :

Exercice de colle (E3)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t} dt$.
Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$? Déterminer de deux façons un équivalent u_n quand n tend vers $+\infty$.

En utilisant le théorème de convergence dominée :

Exercice de colle (E3)

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{(1+t^2)^2} dt$.
Justifier l'existence de $F(x)$ et déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 0.

En utilisant un peu tout :

Exercice (en autonomie)

On considère la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de F.
2. Démontrer que pour tout $x \in D$, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}du$.
3. Démontrer que $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}du$ est bornée sur D.
4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-u}}{x+u}du = -\ln(x) + \underset{x\to 0^+}{O}(1)$.
5. En déduire un équivalent de F en 0^+.

Correction :

1. Déterminer l'ensemble de définition D de F.

Réponse :

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, $\dfrac{e^{-xt}}{1+t} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-xt})$. Comme les fonctions intégrées sont positives, on peut appliquer les théorèmes de comparaison.

Si $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ converge et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ aussi.

Si $x \leqslant 0$, on a $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{e^{-xt}}{1+t}\right)$, et par comparaison, on a la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$.

On a démontré :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt \text{ converge } \iff x > 0.$$

Et donc $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } F \text{ est } D =]0, +\infty[.}$

2. Démontrer que pour tout $x \in D$, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}du$.

Réponse :

En posant $u = xt$ dans l'intégrale (changement de variable affine) on obtient le résultat attendu.

$$\boxed{\forall x \in D, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}du.}$$

3. Démontrer que $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}du$ est bornée sur D.

Réponse :

Pour tout $x \in D$ et pour tout $u \in [1, +\infty[$, on a $0 \leqslant \dfrac{e^{-u}}{x+u} \leqslant e^{-u}$. Et par positivité de l'intégrale :

$$\forall x \in D, \quad 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}du \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-u}du = M.$$

Et donc $\boxed{x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}du \text{ est bornée sur } D.}$

4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-u}}{x+u}du = -\ln(x) + \underset{x\to 0^+}{O}(1)$.

Réponse :

On remarque tout d'abord que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+u}du = \Big[\ln(x+u)\Big]_0^1 = \ln(1+x) - \ln(x) = -\ln(x) + \underset{x\to 0^+}{o}(1)$.

Et de plus (puisque pour $u \geqslant 0$*, on a* $1-e^{-u} \leqslant u$*) :*

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{e^{-u}}{x+u}du - \int_0^1 \frac{1}{x+u}du\right| &= \left|\int_0^1 \frac{e^{-u}-1}{x+u}du\right| = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{x+u}du \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{u}{x+u}du = \int_0^1 \frac{(u+x)-x}{x+u}du \\
&\leqslant 1 - x\int_0^1 \frac{1}{x+u}du = \underbrace{1 - x(\ln(1+x) - \ln(x))}_{=\underset{x\to 0^+}{O}(1)}
\end{aligned}$$

Et donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-u}}{x+u}du - \int_0^1 \frac{1}{x+u}du = \underset{x\to 0^+}{O}(1)$. *Ou encore :* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-u}}{x+u}du = \int_0^1 \frac{1}{x+u}du + \underset{x\to 0^+}{O}(1)$
Et avec la première remarque, on trouve enfin :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-u}}{x+u}du = -\ln(x) + \underset{x\to 0^+}{O}(1).}$$

5. En déduire un équivalent de F en 0^+.

Réponse :

On a donc $$\boxed{F(x) = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-u}}{x+u}du}_{=\underset{x\to 0^+}{O}(1)} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}du = -\ln(x) + \underset{x\to 0^+}{O}(1) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).}$$

6.6.3 Semi-convergence de l'intégrale de Dirichlet (Hors-Programme)

On donne ici une solution assez simple. Une autre, utilisant le théorème des séries alternées est proposée en ligne.

Exercice de colle (E3 - en autonomie)

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ diverge.

Pour le démontrer, on retiendra la démarche suivante.

Exercice

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}$ est convergente.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t}$ est divergente.
3. Démontrer que pour tout $t > 0$, on a : $\displaystyle\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geqslant \frac{1-\cos(2t)}{2t}$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ n'est pas absolument convergente.

Correction :

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}$ est convergente.

Réponse :
L'application $t \longmapsto \dfrac{\cos(2t)}{t}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$.

Soit $X \geqslant 1$. *On effectue une intégration par parties. On pose* $u(t) = \dfrac{1}{t}$ *et* $v(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$. *Les applications* u *et* v *sont* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[1, X]$ *et* $u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ *et* $v'(t) = cos(2t)$. *On a donc :*

$$\int_1^X \frac{\cos(2t)}{t}dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(2t)}{2t^2}dt.$$

En comparant à une intégrale de Riemann, on montrerait l'absolue convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2t^2}dt$ *et puisque* $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{\sin(2X)}{2X} = 0$, *on obtient*

$$\lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{\cos(2t)}{t}dt = -\frac{\sin(2)}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2t^2}dt.$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt \text{ est convergente.}}$

2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{t}$ est divergente.

Réponse :
L'application $t \longmapsto \dfrac{1 - \cos(2t)}{t}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$.
Soit $X \geqslant 1$. *Par opération sur les limites, et puisque* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt$ *est convergente, on a*

$$\int_1^X \frac{1 - \cos(2t)}{t}dt \;=\; \int_1^X \frac{1}{t}dt - \int_1^X \frac{\cos(2t)}{t}dt \;=\; \ln(X) - \int_1^X \frac{\cos(2t)}{t}dt \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{t}dt \text{ est divergente.}}$

3. Démontrer que pour tout $t > 0$, on a : $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| \geqslant \dfrac{1 - \cos(2t)}{2t}$.

Réponse :
Pour tout $t > 0$ *on a* $|sin(t)| \in [0, 1]$ *et donc* $0 \leqslant \sin^2(t) \leqslant |\sin(t)|$.
Or $\sin^2(t) = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}$ *donc en divisant par* $t > 0$ *l'encadrement précédent, on trouve bien :*

$$\boxed{\forall t > 0, \quad \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geqslant \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \geqslant 0.}$$

4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ n'est pas absolument convergente.

Réponse :
On vient de voir que :

$$\forall t \geqslant 1, \qquad \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geqslant \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \geqslant 0.$$

Or d'après la question 2(b), $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t}dt$ *est divergente. Donc, par comparaison, l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ *diverge, a fortiori, on a :*

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$