Chapitre 5

Rappels et compléments sur l'intégration

5.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 1

• Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** ($\mathcal{CM}$ ou c.p.m.) s'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) soit prolongeable en une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$.
Une telle subdivision est dite **adaptée** ou **subordonnée** à f.
• Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** si elle l'est sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Interprétation : Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et en x_i.

Illustration graphique :

Si $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues par morceaux, alors on peut trouver une subdivion adaptée à la fois pour φ et pour ψ. Par conséquent, toute combinaison linéaire de φ et ψ est encore une fonction continue par morceaux.
Et ceci se généralise facilement pour des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$.

Proposition 1

On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de I dans $\mathbb{R}$.

On peut aussi montrer la proposition suivante.

Proposition 2

Si $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur le **segment** $[a, b]$ alors elle est bornée.

5.2 Intégrale sur un segment d'une fonction CM

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment a été définie en première année. Nous en reparlerons dans le paragraphe suivant. On définit ici l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Définition 2

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision adaptée à f. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note f_i la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ prolongée par continuité sur $[x_{i-1}, x_i]$. On peut donc calculer l'intégrale de f_i sur ce segment. On admet que

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)dt + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(t)dt$$

ne dépend pas de la subdivision choisie pour f et on l'appelle intégrale de f sur $[a,b]$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f_1(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)dt + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(t)dt.$$

Interprétation graphique :

A noter :

- **Pour justifier l'existence de l'intégrale d'une fonction sur un segment, il suffit donc de préciser qu'elle est continue par morceaux sur ce segment.**
- La valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ alors f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont, et dans ce cas, on a l'égalité :
$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

5.3 Propriétés

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment sont encore valables quand on suppose la fonction seulement continue par morceaux. On les rappelle ici avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 3 (Linéarité)

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt \;=\; \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

Proposition 4 (Positivité)

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$.

- Si f est positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
- Si pour tout $t \in [a,b]$ on a $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Proposition 5 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soient $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$. On a

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \;\leqslant\; \int_a^b |f(t)|dt.$$

Proposition 6 (Relation de Chasles)

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ où I est un segment. Pour tous $a, b, c \in I$, on a

$$\int_a^b f(t)dt \ = \ \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

5.4 Primitives et intégrale d'une fonction continue

On rappelle les points suivants. Ici I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$.

• Si f est une application de I dans $\mathbb{K}$, une primitive de f sur I est une application F **dérivable** sur I telle que $F' = f$.

• Si f est continue sur I alors elle admet des primitives sur I (voir théorème fondamental ci-dessous).

• Soit f une application continue sur un **intervalle** I. Si F et G sont des primitives de f sur I alors il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telles que $F = G + c$.

• **Notation :** Les primitives génériques d'une fonction f continue sur un intervalle I sont notées :

$$x \longmapsto \int^x f(t)dt \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \int f(x)dx \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \int f$$

Ainsi, par exemple, $\displaystyle\int^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(x) + \text{Cst}.$

Proposition 7 (Théorème fondamental de l'Analyse)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** et a un point de I. Alors la fonction F_a définie sur I par

$$\forall x \in I, \ F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est **la** primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout $x \in I$ on a $F_a'(x) = f(x)$ et $F_a(a) = 0$.

Exercice de colle (E1 - Épreuve écrite E3A PSI 2022)

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(u)du = \int_0^T f(u)du.$

Corollaire 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** et a, b deux points de I. Si F est une primitive de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Corollaire 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $(a, x) \in I^2$, on a

$$f(x) - f(a) = \Big[f(t)\Big]_a^x = \int_a^x f'(t)dt.$$

Corollaire 3 (à savoir retrouver)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** et α, β deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I. Alors la fonction φ définie sur J par

$$\forall x \in J, \quad \varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

est dérivable sur J et pour tout $x \in J$ on a $\varphi'(x) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x))$.

Preuve.

$\square$

Proposition 8

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **positive**. On a

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall t \in [a, b],\ f(t) = 0.$$

Preuve.(D1)

□

Remarque 1 : Par contraposée, cette proposition s'énonce aussi de la manière suivante.
Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **continue**, **positive** et **non identiquement nulle**, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.

Remarque 2 : Ce résultat n'est plus valable si f est seulement continue par morceaux.
Par exemple, si on note E la fonction partie entière, $\displaystyle\int_0^1 E(t)dt = 0$ et pourtant $t \longmapsto E(t)$ n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$.

5.5 Calculs pratiques

5.5.1 Intégration par parties

Proposition 9 (Intégration par parties sur un segment)

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Preuve.

□

5.5.2 Changement de variable

Proposition 10 (Changement de variable sur un segment)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(\alpha, \beta)^2 \in J^2$ on a l'égalité suivante.

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Preuve.

$\square$

5.5.3 Rappels sur les sommes de Riemann

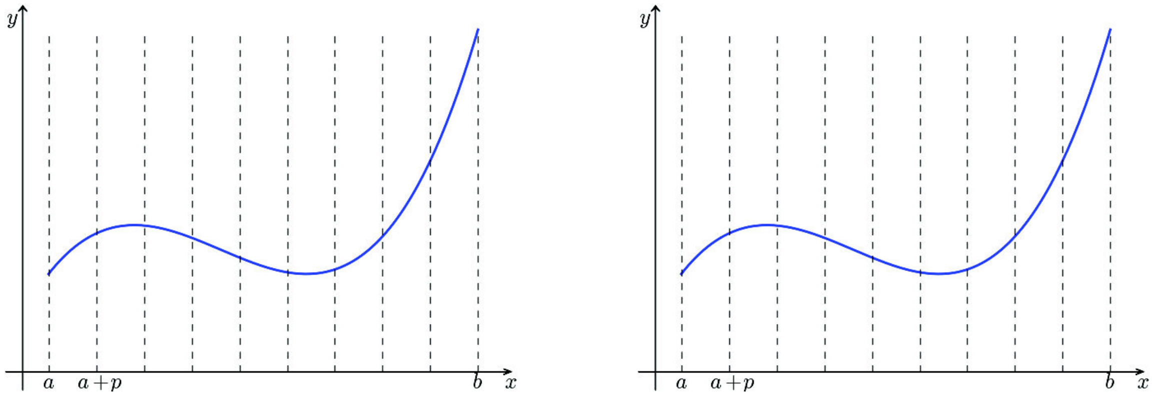
Proposition 11

Soit $f : [a, b] \longrightarrow$ continue. On appelle sommes de Riemann associée à f sur $[a, b]$:

$$S_n^{(1)} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad S_n^{(2)} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Si f est continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(2)} = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Illustrations graphiques :



Remarque : L'application $h : t \in [0,1] \longmapsto h(t) = a + t(b-a) \in [a,b]$ est une bijection affine de $[0,1]$ sur $[a,b]$. Ainsi, quitte à composer par h^{-1}, on pourra toujours se ramener à l'intervalle $[0,1]$:

$$\forall t \in [0,1], \quad g(t) = f \circ h(t) = f(a + t(b-a)).$$

On rencontrera donc souvent des sommes de Riemann associées à des fonctions f continues sur $[0,1]$:

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{ou} \quad S_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Exemple 5.1. *Déterminer un équivalent de* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$.

5.6 Primitives de référence

Fonctions	Primitives	Domaines de validité
$(x-a)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$]0,+\infty[$
$e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\,\text{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arccos}(x)$	$]-1,1[$

5.7 Quelques règles pratiques d'intégration

5.7.1 Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$ où P est un polynôme en x

On intègre successivement par parties, pour faire chuter le degré de P. On obtient alors un polynôme Q de même degré que P tel que

$$\int e^{\alpha x} P(x) dx = e^{\alpha x} Q(x) + \text{cst}.$$

Exemple 5.2. *Calculer* $\int e^{-x}(x^2 - 1) dx$.

5.7.2 Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos(ax) dx$ ou $\int e^{\alpha x} \sin(ax) dx$

On pourra effectuer une double intégration par parties, pour revenir sur l'intégrale de départ, ou bien passer par les intégrales de fonctions complexes en écrivant

$$e^{(\alpha + ia)x} = e^{\alpha x} \cos(ax) + ie^{\alpha x} \sin(ax).$$

Exemple 5.3. *Calculer* $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin(2x) dx$.

5.7.3 Calcul de primitives de fractions rationnelles

Dans un premier temps, on décompose la fraction en éléments simples (voir annexe). Par linéarité, on est amené à calculer les intégrales des fractions élémentaires suivantes

$$\frac{1}{(x-a)^n} \quad \text{et} \quad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} \qquad \text{avec} \;\; \Delta = p^2-4q<0,$$

et éventuellement d'un polynôme.

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + \text{cst}.$
- Pour $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}$, on a $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \text{cst}.$
- Pour calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ (avec $\Delta = p^2-4q<0$), écrire x^2+px+q sous la forme u^2+a^2, effectuer le changement de variable correspondant puis utiliser

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{1/a}{(u/a)^2+1} du = \frac{1}{a}\,\text{Arctan}\left(\frac{u}{a}\right) + \text{cst}.$$

Exemple 5.4. *Calculer* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x+x^2}$.

- Pour calculer $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$ (avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$), faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur puis séparer en deux fractions.
  L'une d'elle est du type $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, l'autre se calcule comme précédemment.

  Exemple 5.5. *Calculer* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{1+x+x^2}dx$.

- Pour calculer enfin $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ (avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$), comme précédemment, séparer l'intégrale en deux.
  L'une revient à intégrer $\dfrac{u'(x)}{u^n(x)}$, l'autre, après changement de variable, se ramène au calcul de $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. On calcule cette dernière par intégrations successives en partant de $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$.

  Exemple 5.6. *Calculer* $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

5.7.4 Règles de Bioche

On s'intéresse ici aux primitives du type
$$\int F(\cos(x), \sin(x))dx,$$
où $F(X, Y)$ est une fraction rationnelle en les variables X, Y.
On appelle opérande l'expression $F(\cos(x), \sin(x))dx$. Dans la mesure du possible, on pourra effectuer les changements de variable suivants.

- Si l'opérande est inchangé par la transformation $x \mapsto -x$, on posera $u = \cos(x)$.
- Si l'opérande est inchangé par la transformation $x \mapsto \pi - x$, on posera $u = \sin(x)$.
- Si l'opérande est inchangé par la transformation $x \mapsto \pi + x$, on posera $u = \tan(x)$.
- Si aucune de ces situations n'est réalisée, si cela est possible, on posera $t = \tan(x/2)$ et on utilisera les égalités suivantes.
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$
$$dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

On est alors ramené au calcul de primitives de fractions rationnelles.

Dans le cas particulier où F est une fonction polynomiale, par linéarité de l'intégrale, on est ramené à déterminer les primitives de $x \longmapsto \cos^n(x)\sin^m(x)$.

- Si $n = 2p+1$ alors $\cos^n(x)\sin^m(x)dx = \cos^{2p}(x)\sin^m(x)\cos(x)dx = (1-\sin^2(x))^p \sin^m(x)d(\sin(x))$.
  On posera $u = \sin(x)$.
- Si $m = 2p+1$ alors $\cos^n(x)\sin^m(x)dx = \cos^n(x)\sin^{2p}(x)\sin(x)dx = -\cos^n(x)(1-\cos^2(x))^p d(\cos(x))$.
  On posera $u = \cos(x)$.
- Si m et n sont pairs, on linéarisera $\cos^n(x)\sin^m(x)$ à l'aide des formules d'Euler.

Exemple 5.7. *Calculer* $\displaystyle\int \cos^3(x)\sin^2(x)dx$

Exemple 5.8. *Calculer* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{2-\cos^2(x)+\sin(x)}dx$

Exemple 5.9. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx.$

Exemple 5.10. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx.$

5.8 Annexe

5.8.1 Décomposition en éléments simples

On définit l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles par l'égalité

$$\mathbb{R}(X) = \left\{ F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \Big/ \; P(X), Q(X) \in \mathbb{R}[X] \text{ avec } Q(X) \neq 0 \right\}.$$

La notion de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ n'est pas au programme de PSI, mais il sera souvent utile d'en connaître les principes pour effectuer certains calculs (primitives, développements en série entière). Les « éléments simples » de $\mathbb{R}(X)$ sont les suivants.

$$\frac{\alpha}{(X-a)^n} \quad \text{et} \quad \frac{\beta X + \gamma}{(X^2+pX+r)^n} \quad \text{avec} \quad \Delta = p^2 - 4r < 0.$$

Division euclidienne de P par Q.

On sait qu'il existe un unique couple $(A, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que

$$P(X) = A(X)Q(X) + R(X) \quad \text{et } \deg(R) < \deg(Q).$$

En reportant dans F, on obtient

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{A(X)Q(X) + R(X)}{Q(X)} = A(X) + \frac{R(X)}{Q(X)}.$$

On est donc ramené au problème suivant.

Décomposition de $\frac{R(X)}{Q(X)}$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$.

On effectue la décomposition en produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $Q(X)$:

$$Q(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^{s} (X^2 + p_j X + q_j)^{m_j}.$$

Alors, on a une décomposition unique de $\frac{R(X)}{Q(X)}$ sous la forme

$$\frac{R(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_{1,i}}{(X-a_i)} + \frac{\alpha_{2,i}}{(X-a_i)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_i,i}}{(X-a_i)^{n_i}} \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\beta_{1,j}X + \gamma_{1,j}}{(X^2+p_jX+r_j)} + \frac{\beta_{2,j}X + \gamma_{2,j}}{(X^2+p_jX+r_j)^2} + \cdots + \frac{\beta_{m_j,j}X + \gamma_{m_j,j}}{(X^2+p_jX+r_j)^{m_j}} \right).$$

Exemple 5.11. *Déterminer la décomposition en éléments simples* $F(X) = \frac{X^4+1}{(X-1)^2(X^2+1)}$.

5.8.2 Formules de Taylor

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$. On définit le polynôme de Taylor de f à l'ordre n en a par :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

On peut voir que, sous certaines conditions, ce polynôme « approche » convenablement f au voisinage de a. Pour mesurer cette approximation, on s'intéresse à la différence $f(x) - T_n(x)$ et on regarde si elle est « petite ». On appelle cette différence **reste de Taylor de f à l'ordre n en a** et on la note $R_n(x)$. Ainsi, on a :

$$f(x) \; = \; T_n(x) \; + \; R_n(x).$$

La formule de Taylor avec reste intégrale donne une expression exacte de $R_n(x)$ sous forme d'une intégrale lorsque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Proposition 12 (Formule de Taylor avec reste intégrale)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Montrer que pour tout $(a, x) \in I^2$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Preuve. (D1)

□

En partant de l'égalité de Taylor avec reste intégrale, on démontre **l'inégalité de Taylor-Lagrange**, qui elle est au programme. Elle donne une majoration (en valeur absolue) du reste intégrale, valable sur un intervalle (propriété globale).

Proposition 13 (Inégalité de Taylor-Lagrange - 1)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{K})$ et si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$ alors on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Preuve.

□

On donne un énoncé ne distinguant plus la position relative des bornes a et x.

Proposition 14 (Inégalité de Taylor-Lagrange - 2)

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I alors pour tout $(a, x) \in I^2$ on a :

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Enfin, **la formule de Taylor-Young** donne un ordre de grandeur du reste, seulement au voisinage d'un point (propriété locale). Elle permet d'obtenir les premiers développements limités du cours.

Proposition 15 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et a un élément de I. Alors $R_n(x) = \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$