

Chapitre 3

Suites numériques

3.1 Limites

3.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Illustration graphique :

Définition 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si on a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies u_n \geq A.$$

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Définition 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si on a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 1

Toute suite convergente est bornée.

Preuve.(D1)

□

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ .

Si $\ell > 0$ alors il existe un réel $m > 0$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que l'on ait $\forall n \geq n_0, u_n > m$.

Preuve.

□

Proposition 3

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' . On a :

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la suite $(a.u_n + b.v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $al + b\ell'$.
2. La suite $(u_n.v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.
3. Si $\ell' \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
4. **Passage à la limite** dans une inégalité :
Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **réelles** et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$ alors on a aussi $\ell \leq \ell'$.

3.1.2 Suites extraites

Définition 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 3.1. Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .

Exemple 3.2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ est divergente.

On pourrait également, en utilisant la définition de limite, montrer la proposition suivante.

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

3.2 Relations de comparaison

3.2.1 Comparaison locale de suites

Définition 5

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite **bornée** $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$u_n = v_n w_n.$$

On note $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

2. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tendant vers 0** telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$u_n = v_n w_n.$$

On note $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

3. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tendant vers 1** telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$u_n = v_n w_n.$$

On note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Remarque : Si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), on peut diviser toutes les égalités par v_n et on obtient la proposition suivante.

Proposition 6

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas (à partir d'un certain rang n_0). On a les équivalences suivantes.

$$u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff \text{la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0} \text{ est bornée}$$

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1$$

Exemple 3.3. Démontrer que $\frac{n \ln(n)}{n^3 + 3n + 1} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

3.2.2 Premières propriétés

- La relation $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ signifie :
- La relation $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(1)$ signifie :
- A retenir :

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n &\iff u_n - v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ &\iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{aligned}$$

• **Transitivité :**

Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$; c'est la transitivité de la relation o .

Si $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et $v_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$; c'est la transitivité de la relation O .

• **Linéarité :**

Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $au_n + bv_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.

Si $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ et $v_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $au_n + bv_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.

- On se méfiera de l'équivalence $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, quasiment toujours fausse!
Celle-ci signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **nulle à partir d'un certain rang**.
- **Opérations sur les équivalents :**
On peut multiplier et diviser des équivalents. On ne peut pas composer des équivalents par une fonction. On ne peut pas ajouter des équivalents. Cependant, on pourra utiliser la propriété suivante.

$$v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(u_n) \iff u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

- **Équivalents et limites :** Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On a l'implication suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} l$.
- **Équivalents et signes :** Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors pour n assez grand, u_n et v_n sont de même signe.

3.3 Théorèmes d'existence

3.3.1 Suite monotone

Proposition 7 (Théorème de la limite monotone)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée alors elle converge.
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

3.3.2 Théorème d'encadrement

Proposition 8 (Théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou du moins à partir d'un certain rang), on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite vaut ℓ .

Attention : On confond souvent le théorème d'encadrement (qui donne l'existence et la valeur d'une limite) et le passage à la limite dans des inégalités qui nécessite de **connaître au préalable** l'existence des limites.

3.3.3 Suites adjacentes

Définition 6

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dira que ces suites sont **adjacentes**, si :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$,
2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Remarque : Les points 2. et 3. entraînent le point 1. Il n'est donc pas nécessaire de vérifier que $u_n \leq v_n$.

Proposition 9

Si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes alors elles convergent et elles convergent vers une même limite ℓ .
De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$.

Définition 7 (Valeurs approchées)

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ un réel (par exemple une limite de suite).

On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de ℓ à $\varepsilon > 0$ près si $|\ell - \alpha| < \varepsilon$.

On dira de plus, que α est une valeur approchée à ε près par défaut (resp. par excès) si $\ell - \varepsilon < \alpha \leq \ell$ (resp. $\ell \geq \alpha < \ell + \varepsilon$).

Exemple 3.4. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2, v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Justifier l'existence de ces deux suites et étudier le signe de $u_n - v_n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.

3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

4. Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée l à 10^{-4} près.

5. Écrire en Python une fonction `suites(n)` qui prend pour argument un entier `n` et qui renvoie la liste $[u_n, v_n]$.

```
1 import math
2 def suites(n) :
```

6. Écrire en Python une fonction `valeur(eps)` qui prend pour argument un réel `eps > 0` et qui renvoie une valeur approchée de l à `eps` près par défaut.

```
1 def valeur(eps) :
```

3.4 Deux exemples à connaître (cf Vade Mecum)

3.4.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 10

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On suppose qu'il existe des réels b et c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

On note $(\mathcal{E}) : x^2 + bx + c = 0$ l'équation caractéristique associée et $\Delta = b^2 - 4c$ son discriminant.

• Si $\Delta \neq 0$ alors (\mathcal{E}) possède deux solutions (éventuellement complexes) z_1 et z_2 distinctes et on peut trouver deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Az_1^n + Bz_2^n.$$

• Si $\Delta = 0$ alors (\mathcal{E}) possède une solution double (éventuellement complexe) z_0 et on peut trouver deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An + B)z_0^n.$$

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\Delta < 0$ alors les solutions de (\mathcal{E}) sont de la forme $re^{\pm i\theta}$ avec $r > 0$ et on peut trouver deux constantes réelles A et B telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n(A \cos(\theta n) + B \sin(\theta n)).$$

Mise en oeuvre : Cf. DNS0.

3.4.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 8

On appelle suite arithmético-géométrique, une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b \quad (*)$$

où a et b sont des constantes numériques données.

Plan d'étude : Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique et si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique. On suppose donc désormais que $a \neq 1$ et que $b \neq 0$.

- Déterminer l'unique suite constante vérifiant (*). On note ℓ cette constante.
- Poser $v_n = u_n - \ell$ et montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .
- En déduire l'expression de v_n , puis celle de $u_n = v_n + \ell$.

Mise en oeuvre : Cf. DNS0.

3.5 Étude des suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

3.5.1 Définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une application de I dans \mathbb{R} . On veut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

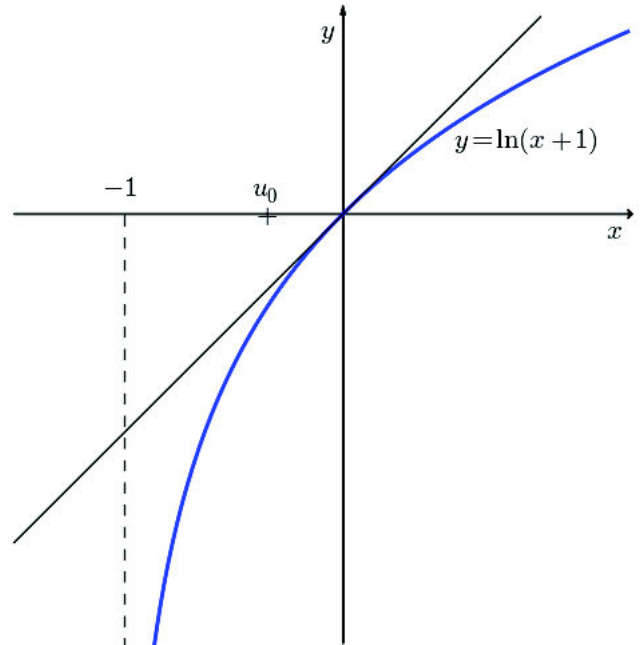
$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On ne peut pas toujours le faire !

Cela dépend de la fonction f .

Exemple 3.5. On peut démontrer qu'il n'est pas possible de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in]-1, 0[, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n). \end{cases}$$



Remarque : Si f est définie sur \mathbb{R} ou si $f(I) \subset I$ alors on pourra toujours calculer u_n . Ainsi, par exemple, les suites suivantes sont bien définies.

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \exp(u_n - 1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \end{cases}$$

Proposition 11

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est **continue** sur I alors on a l'implication :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \implies f(\ell) = \ell.$$

Ainsi, si f est continue sur I , les seules limites possibles pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont **contenues dans** I sont les points fixes de f .

Preuve. (D1)

Ainsi, l'hypothèse de la continuité est **essentielle**. Il ne faut pas oublier de la vérifier, même si celle-ci est évidente ! Il ne faut pas non plus oublier les limites possibles qui ne seraient pas dans I mais à ses extrémités. □

3.5.2 Monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Attention, les énoncés qui suivent sont dans le programme mais pas en tant que proposition.

• Par l'étude du signe de $f(x) - x$:

Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on s'intéresse au signe de

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Avec les notations précédentes, si I est un intervalle de \mathbb{R} , on a l'implication suivante.

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I \\ \forall x \in I, f(x) \geq x \quad (\text{resp. } f(x) \leq x) \end{array} \right\} \implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante (resp. décroissante)}$$

Exemple 3.6. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ (E1).

• En utilisant la croissance de f (démonstration par récurrence) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est **croissante**, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone**. Plus précisément, on a :

- si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Preuve. (D1) Ce résultat se montre très simplement par récurrence. On prouve le premier point. On suppose que f est croissante et que l'on a $u_1 \geq u_0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{P}_n la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : \quad u_{n+1} \geq u_n.$$

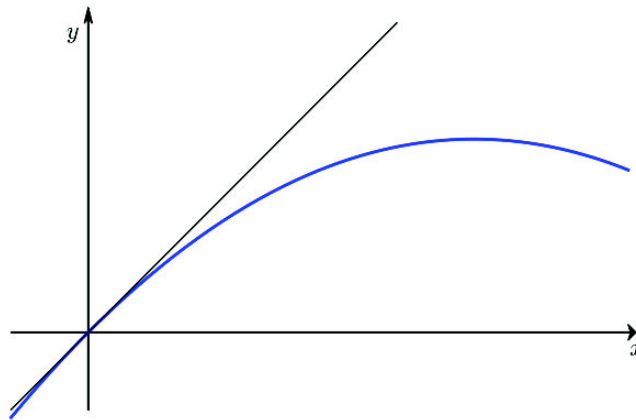
Initialisation :

Hérédité :

Le cas où f est croissante et $u_1 \leq u_0$ est très similaire.

□

Illustration graphique :



Remarque :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
 Si f est décroissante, alors la fonction $f \circ f$ est croissante et en appliquant ce qui précède, on montre que les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonies opposées.

Preuve. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 On a alors d'une part $f(v_n) = u_{2n+1}$ et donc

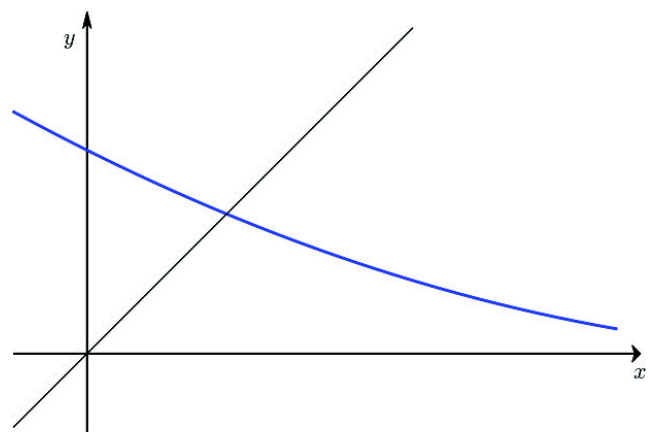
$$f(f(v_n)) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = v_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$f \circ f(v_n) = v_{n+1}$$

avec $f \circ f$ croissante. D'après le premier cas, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. On montrerait de même que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi. Et par décroissance de f , les premiers termes de ces suites ont des ordres opposés. Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de monotonies contraires. □

Illustration graphique :



3.5.3 Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

On rappelle l'énoncé suivant connu sous le nom d'Inégalité des Accroissements Finis.

Proposition 12

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- S'il existe un réel m tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $m \leq f'(x)$ alors on a

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a).$$
- S'il existe un réel M tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $f'(x) \leq M$ alors on a

$$f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$
- S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $|f'(x)| \leq M$ alors on a

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

On utilise cet énoncé avec par exemple $b = u_n$ et $a = \ell$ (un point fixe de f).

Avec le troisième énoncé, on obtient $|f(u_n) - f(\ell)| \leq M|u_n - \ell|$ soit :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M|u_n - \ell|.$$

Par récurrence, on montrerait facilement que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|.$$

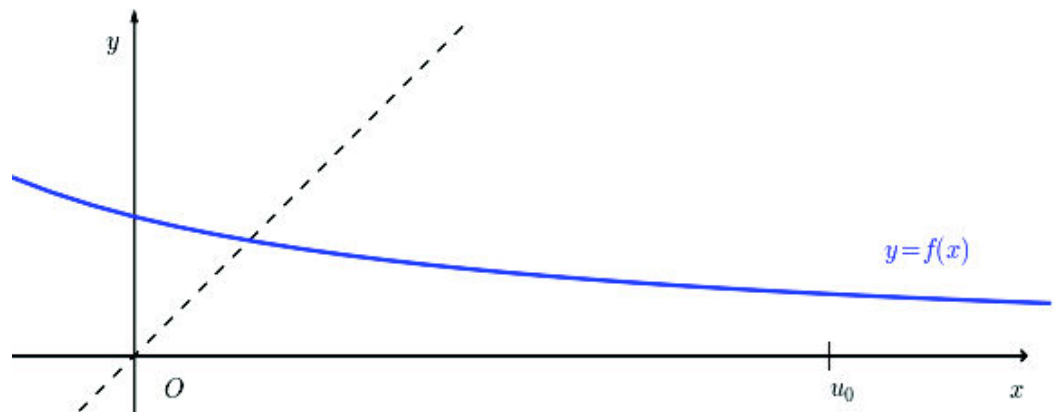
Ainsi, si $0 < M < 1$ alors M^n tend vers 0 et le théorème de majoration donne la convergence vers ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans le cas où $M > 1$ et où $u_0 \geq \ell$, avec le premier énoncé, on montrerait de même que la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger.

Exemple 3.7. On définit la fonction f par $f(x) = \frac{1}{x+2}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{u_n + 2}.$$

- *Illustration graphique :*



- *Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que ses termes sont positifs.*

- Déterminer la seule limite ℓ possible de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- On suppose ici que $u_0 = 1$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge effectivement vers ℓ et déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

3.6 Quelques outils à connaître

3.6.1 Inégalités

- Fonctions majorées, minorées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1, \quad |\operatorname{Arctan}(x)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) \geq 1.$$

- Inégalités de convexité :

$$\forall x \geq -1, \quad \ln(1+x) \leq x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leq e^x.$$

- Autres inégalités :

$$\forall x \geq 0, \quad \sin(x) \leq x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x| \quad \text{et} \quad |x| \leq |\operatorname{sh}(x)|.$$

- Inégalités triangulaires :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+y \leq |x+y| \leq |x|+|y| \quad \text{et} \quad \left| |x|-|y| \right| \leq |x-y|$$

3.6.2 Limites de référence

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{(\ln(x))^l} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k (\ln(x))^l = 0 \quad (\text{si } k > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$$

3.6.3 Développements limités

Développements limités provenant de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$$

Développements limités provenant de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ \operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \\ \operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ \operatorname{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Développement limité de $(1+x)^\alpha$:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \end{aligned}$$

3.7 Annexe

3.7.1 Rappels sur la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de \mathbb{R}

Définition 9 (Majorant, minorant, partie bornée)

Soit A une partie de \mathbb{R} et M un réel. On dit que :

- M est un majorant de A si : $\forall a \in A, a \leq M$,
- m est un minorant de A si : $\forall a \in A, m \leq a$,
- A est une partie bornée si elle possède un majorant et un minorant, c'est-à-dire si :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall a \in A, \quad m \leq a \leq M.$$

Définition 10 (borne supérieure, inférieure)

Soit A une partie de \mathbb{R} .

- On appelle, si elle existe, borne supérieure de A , le plus petit de ses majorants. On la note $\sup(A)$.
- On appelle, si elle existe, borne inférieure de A , le plus grand de ses minorants. On la note $\inf(A)$.

Proposition 13 (Très important!)

Si A est une partie **non vide** et **majorée** (resp. minorée) de \mathbb{R} , alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure).

Par convention :

- Si A est une partie non vide et **non majorée** de \mathbb{R} , on écrira $\sup(A) = +\infty$.
- Si A est une partie non vide et **non minorée** de \mathbb{R} , on écrira $\inf(A) = -\infty$.

Exercice de colle (E3)

Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer les équivalences suivantes :

$$(1) \quad \alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \end{cases} \quad (2)$$

$$\iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A, \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Exercice

Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . Montrer que :

$$A \subset B \implies \sup(A) \leq \sup(B)$$

3.7.2 Suites à croissance contrôlée**Exercice de colle (E1)**

Soit $L > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe vérifiant

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L.$$

1. **(E1)** On suppose que $L < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Est-ce encore vrai pour $L = 1$?
3. Application : soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!}$.

1.(E1)

2.

3.

3.7.3 Définition des relations de comparaison avec les quantificateurs

Exercice de colle (E3)

Écrire avec les quantificateurs les définitions suivantes (a est un réel).

1. $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$

2. $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$

3. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)$

4. $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$

5. $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$

6. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))$

3.7.4 Théorème de Césaro (MPSI)

Exercice de colle (E3 en autonomie)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On suppose que cette suite converge et on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ .

Preuve.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les majorations suivantes.

$$\begin{aligned} |v_n - a| &= \left| \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} - a \right| \\ &= \frac{1}{n} |u_1 + u_2 + \dots + u_n - n.a| \\ &= \frac{1}{n} |(u_1 - a) + (u_2 - a) + \dots + (u_n - a)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - a| \end{aligned}$$

On a donc démontré $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |v_n - a| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - a|.$

• On démontre à présent le résultat en revenant à la définition de limite. L'idée est de « couper » la somme précédente en deux. Soit $\varepsilon > 0$.

\hookrightarrow Par définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k \geq N_1 \implies |u_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

\hookrightarrow L'entier N_1 étant constant, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - a| \right) = 0$. Et encore par définition, on obtient :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq N_2 \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

\hookrightarrow Soit $N_0 = \max(N_1, N_2)$ et $n \geq N_0 + 1$ un entier. On a les majorations suivantes.

$$\begin{aligned} |v_n - a| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - a| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n |u_k - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \times n \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq N_0 \implies |v_n - a| \leq \varepsilon$. C'est la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$.

□