Chapitre 7

Rappels sur les polynômes

7.1 Structures algébriques sur l'ensemble des polynômes :

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit quatre lois.

- La loi . définie par $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda.P)(X) = \lambda.P(X)$.
- La loi $+$ définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$.
- La loi $\times$ définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \times Q)(X) = P(X) \times Q(X)$.
- La loi $\circ$ définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \circ Q)(X) = P(Q(X))$.
  Ou encore, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P \circ Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k(X)$.

7.2 Degré d'un polynôme :

Définition 1

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $P = 0$, on pose $\deg(P) = -\infty$.
- Sinon, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, et on pose $\deg(P) = n$.
  - a_n est appelé coefficient dominant et $a_n X^n$ terme dominant de $P(X)$.
  - Si $a_n = 1$, on dit que $P(X)$ est unitaire.

Proposition 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.

Exemple 7.1. *Déterminer le degré de* $P(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$. On a $\deg(P) \leq 2n$.

termes en X^{2n} : $1 - 2 + 1 = 0$

termes en X^{2n-2} : $\binom{2n}{1} - \binom{2n}{1} = 0$

termes en X^{2n-4} : $\binom{2n}{2} + \binom{2n}{2} \neq 0$

donc $\deg(P) = 2n-2$ (enfin... si $n \geq 2$)

si $n = 0$ ou 1, $P = 0$ donc $\deg(P) = -\infty$

Ou encore :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\cancel{n}} \binom{n}{k} X^{2k} - \cancel{2X^{2n}} + \sum_{k=0}^{\cancel{n}} \binom{n}{k} X^{2k} (-1)^{n-k}$$

$$\underset{(n\geq 1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \underbrace{\left(1 + (-1)^{n-k}\right)}_{=0 \text{ si } k = n-1} X^{2k}$$

$$\underset{(n \geq 2)}{=} \underbrace{\binom{n}{n-2} \times 2}_{\neq 0} X^{2(n-2)} + \text{termes de deg.} \leq 2(n-3)$$

donc si $n \geq 2$, $\deg(P) = 2(n-2)$

7.3 Multiples et diviseurs d'un polynôme :

Définition 2

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que $Q \in \mathbb{K}[X]$ divise P (ou est un diviseur de P) si il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = U \times Q$. On note $Q|P$.
- On dit que Q est un multiple de P si P est un diviseur de Q. On note $P.\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des multiples de P.

Proposition 3 (Division euclidienne)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est appelé le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Exemple 7.2. *Quel est le reste de la division euclidienne de* $P(X)$ *par* $(X - a)$ *?*

$(X-a) \neq 0$. Donc $\exists ! \, (Q, R) \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = (X-a)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(X-a) = 1$

Ainsi $R(X)$ est un polynôme constant. On le note α.

$P(X) = (X-a)Q(X) + \alpha$. En évaluant en $X = a$, on obtient :

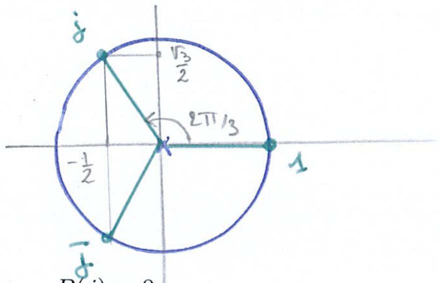
$$R(X) = \alpha = P(a) \in \mathbb{K}.$$

Exemple 7.3. *Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de* $U(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$ *par* $V(X) = X^2 + 2X - 1$.

On "pose" cette division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1 & X^2 + 2X - 1 \\ \cline{2-2}
X^4 + 2X^3 - X^2 & X^2 - 5X + 13 \\ \cline{1-1}
-5X^3 + 3X^2 - X + 1 & \\
-5X^3 - 10X^2 + 5X & \\ \cline{1-1}
13X^2 - 6X + 1 & \\
13X^2 + 26X - 13 & \\ \cline{1-1}
-32X + 14 &
\end{array}$$

Donc : $\boxed{U(X) = (X^2 - 5X + 13)V(X) - 32X + 14}$



Rappel : racines cubiques de l'unité. On pose $j = e^{2i\pi/3}$.
Les racines cubiques de l'unité sont $1, j, \bar{j} = j^2$.

$$X^3 - 1 = (X-1)\underbrace{(X-j)(X-\bar{j})}_{X^2+X+1} = (X-1)(X^2+X+1).$$

Exemple 7.4.

1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que : $B = X^2 + X + 1$ divise $P \iff P(j) = 0$.*

$\Rightarrow$ Si X^2+X+1 divise $P(X)$. Par définition, $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tq $P(X) = Q(X)(X^2+X+1)$

Donc $P(j) = Q(j)\underbrace{(j^2+j+1)}_{=0} = 0$. Ainsi $P(j) = 0$.

$\Leftarrow$ Si $P(j) = 0$

$j \in \mathbb{C}$ est racine de P. Comme P est à coefficients réels $\bar{j}$ est aussi racine de P. Comme $j, \bar{j}$ sont distincts, $(X-j)(X-\bar{j})$ divise P.

Or $(X-j)(X-\bar{j}) = X^2+X+1$ donc X^2+X+1 divise P.

Remarque : On aurait aussi pu écrire la division euclidienne de P par X^2+X+1 : $\exists Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que.
$P(X) = Q(X)(X^2+X+1) + aX + b$. Ainsi :
$P(j) = 0 = Q(X)\underbrace{(j^2+j+1)}_{=0} + aj + b$. $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$0 = a\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b = \left(-\frac{a}{2} + b\right) + ia\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $a = b = 0$
et (X^2+X+1) divise P.

2. *En déduire que le polynôme $A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ est divisible par B.*

D'après la question 1, B divise A si et seulement si $A(j) = 0$.
Or puisque $j^3 = 1$ et j^2+j+1, on a :

$$A(j) = j^{3n+2} + j^{3m+1} + j^{3p} = \underbrace{(j^3)^n}_{=1} \times j^2 + \underbrace{(j^3)^m}_{=1} \times j + \underbrace{(j^3)^p}_{=1}$$
$$= j^2 + j + 1$$
$$= 0.$$

Et donc $\boxed{B \text{ divise } A.}$

On rappelle le résultat suivant, démontré dans le chapitre *Révisions d'algèbre linéaire*.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'ensemble $\mathbb{K}[X].P$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{K}[X].P$.

7.4 Dérivation d'un polynôme :

Définition 3

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P, le polynôme

$$P'(X) = \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\alpha_{k+1} X^k.$$

De proche en proche, on définit les polynômes dérivés successifs de P par $P^{(k+1)}(X) = \left(P^{(k)}(X)\right)'$.

Exemple 7.5. *Déterminer le degré et le terme dominant de* $L_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

On note $P_n(X) = (X^2-1)^n$.

Il existe Q_n de degré $\leqslant 2n-1$ tel que

$P_n(X) = (X^2-1)^n = X^{2n} + Q_n(X)$.

$P'_n(X) = 2n X^{2n-1} + Q'_n(X)$

$P''_n(X) = 2n(2n-1) X^{2n-2} + Q''_n(X)$

$\vdots$

$L_n(X) = P_n^{(n)}(X) = \underbrace{2n(2n-1)\times\cdots\times(n+1)}_{\neq 0} X^n + \underbrace{Q_n^{(n)}(X)}_{\text{de deg } \leqslant 2n-1-n = n-1}$

$\boxed{\text{Ainsi } \deg(L_n) = n \text{ et le terme dominant de } L_n = (2n)\times(2n-1)\times\cdots\times(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}}$

Proposition 4 (Formule de Taylor)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout entier $N \geqslant n$ et tout $a \in \mathbb{K}$, on a

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \quad \text{ou encore} \quad P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

7.5 Racines d'un polynôme :

Proposition 5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$.

(2) $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X-a)^n Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que a est racine d'ordre n de P.

Proposition 6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts.

- On a l'équivalence suivante.

$$a_1, \ldots, a_n \text{ racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n} (X - a_i) \text{ divise } P(X).$$

- Si $a_1, \ldots, a_n$ sont racines de P et si $\deg(P) = n$ alors $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i)$ où λ est le coefficient dominant de P.
- Un polynôme P non nul a au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

Exemple 7.6. *Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $X^2 - 2X + 1$.*

$P_n(X)$ est divisible par $X^2-2X+1 = (X-1)^2 \iff 1$ est racine d'ordre au moins 2 de P_n
$\iff P_n(1) = P_n'(1) = 0$

Or :
$P_n'(X) = n(n+1)X^{n+1} - n(n+1)X^n$. Donc $P_n(1) = n-(n+1)+1 = 0$ et $P_n'(1) = n(n+1) - n(n+1) = 0$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, X^2-2X+1 divise $P_n(X)$

Relation coefficients/racines : Pour trouver les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme $P(X)$, on écrit

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i).$$

On développe le produit, puis on identifie les coefficients. Il faut connaître les résultats suivants.

- Si $P(X) = aX^2 + bX + c$ et si a_1, a_2 sont ses racines, on a $S = a_1 + a_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $P = a_1 a_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et si a_1, a_2, a_3 sont ses racines, on a

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{-b}{a}, \quad a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad a_1a_2a_3 = \frac{-d}{a}.$$

En effet : $aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)$
$= a\left(X^3 - (a_1+a_2+a_3)X^2 + (a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)X - a_1a_2a_3\right)$

Par unicité des coefficients : $\begin{cases} b = -a(a_1+a_2+a_3) \\ c = a(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1) \\ d = -a(a_1a_2a_3) \end{cases}$ (il reste à diviser par $a \neq 0$)

Exemple 7.7. *Déterminer les racines de $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux d'entre elles vaut la troisième.*

On note α, β et $\gamma = \alpha+\beta$ les trois racines de $P(X)$.
Les relations coefficients/racines (cf. ci-dessus) donnent ici : $(a=1)$.

$$\begin{cases} -(\alpha+\beta+\gamma) = -8 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 23 \\ -\alpha\beta\gamma = -28 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\gamma = 8 \quad \text{ie } \gamma = 4 \\ 23 = \alpha\beta + 4(\alpha+\beta) \\ 28 = 4\alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 4 \\ \alpha\beta = 7 \text{ (produit)} \\ \alpha+\beta = 4 \text{ (somme)} \end{cases}$$

Ainsi, α, β sont les racines de $X^2 - 4X + 7$
$\Delta = 16 - 4\times 7 = -12 = -(2\sqrt{3})^2 < 0$.

Finalement, $\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont } 4,\ 2+i\sqrt{3} \text{ et } 2-i\sqrt{3}}$

7.6 Décomposition en produit de facteurs irréductibles :

Proposition 7 (Théorème de D'Alembert)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe et donc tout polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{C}$.

Proposition 8

Soit $P(X)$ polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. Alors $P(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{n_i}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines de P et $n_1, \ldots, n_r$ leurs multiplicités respectives.

Proposition 9

Soit $P(X)$ polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. Alors $P(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^{s} (X^2 + p_j X + q_j)^{m_j}$$

avec pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, $p_j^2 - 4q_j < 0$.

Exemple 7.8. *Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - 1$.*

Rappel (cf. Vade Mecum) : si $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\rho > 0$.

$$z^n = 1 \iff \rho^n e^{in\theta} = 1 = 1 . e^{i0}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 & (\text{car } \rho > 0). \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} & \end{cases}$$

(il suffit de choisir n entiers consécutifs pour k)

Ici, les racines 5-ièmes de l'unité sont :

$$1,\ e^{2i\pi/5},\ e^{4i\pi/5},\ e^{6i\pi/5} = e^{-4i\pi/5},\ e^{8i\pi/5} = e^{-2i\pi/5}$$

$$P(X) = (X-1)\underbrace{(X - e^{2i\pi/5})(X - e^{-2i\pi/5})}\ \underbrace{(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}})} \quad (\text{déc. dans } \mathbb{C}[X])$$

$$P(X) = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right)X + 1\right) \quad (\text{déc. dans } \mathbb{R}[X])$$

car $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})X + e^{i\theta} . e^{-i\theta} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$