

# Chapitre 1

## Rappels sur les polynômes

### 1.1 Structures algébriques sur l'ensemble des polynômes :

On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On définit quatre lois.

- La loi  $\cdot$  définie par  $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda \cdot P)(X) = \lambda \cdot P(X)$ .
- La loi  $+$  définie par  $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$ .
- La loi  $\times$  définie par  $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (P \times Q)(X) = P(X) \times Q(X)$ .
- La loi  $\circ$  définie par  $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (P \circ Q)(X) = P(Q(X))$ .

Ou encore, si  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  alors  $P \circ Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k(X)$ .

### 1.2 Degré d'un polynôme :

#### Définition 1

Soit  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ .

- Si  $P = 0$ , on pose  $\deg(P) = -\infty$ .
- Sinon,  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_n \neq 0$ , et on pose  $\deg(P) = n$ .
  - $a_n$  est appelé coefficient dominant et  $a_n X^n$  terme dominant de  $P(X)$ .
  - Si  $a_n = 1$ , on dit que  $P(X)$  est unitaire.

#### Proposition 1

Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , on a

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$  avec égalité lorsque  $\deg(P) \neq \deg(Q)$ .
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ .
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ .

#### Proposition 2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $n$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n + 1$  de  $\mathbb{K}[X]$ .

On appelle base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$  la famille  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ .

**Exemple 1.1.** Déterminer le degré de  $P(X) = (X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$ .

### 1.3 Multiples et diviseurs d'un polynôme :

#### Définition 2

Soit  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ .

- On dit que  $Q \in \mathbb{K}[X]$  divise  $P$  (ou est un diviseur de  $P$ ) si il existe  $U \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = U \times Q$ .  
On note  $Q|P$ .
- On dit que  $Q$  est un multiple de  $P$  si  $P$  est un diviseur de  $Q$ .  
On note  $P \cdot \mathbb{K}[X]$  l'ensemble des multiples de  $P$ .

#### Proposition 3 (Division euclidienne)

Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  avec  $B \neq 0$ .

Il existe un unique  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

$Q$  est appelé le quotient et  $R$  le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

**Exemple 1.2.** Quel est le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $(X - a)$  ?

**Exemple 1.3.** Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $U(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$  par  $V(X) = X^2 + 2X - 1$ .

Rappel : racines cubiques de l'unité.

Exemple 1.4.

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On pose  $j = e^{2i\pi/3}$ . Montrer que :  $B = X^2 + X + 1$  divise  $P \iff P(j) = 0$ .

2. En déduire que le polynôme  $A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$  est divisible par  $B$ .

On donne le résultat suivant, que l'on montrera dans le chapitre *Révisions d'algèbre linéaire*.

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme non nul de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- L'ensemble  $\mathbb{K}[X].P$  des multiples de  $P$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{K}[X].P$ .

## 1.4 Dérivation d'un polynôme :

### Définition 3

Soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . On appelle polynôme dérivé de  $P$ , le polynôme

$$P'(X) = \sum_{k=0}^n k \alpha_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \alpha_{k+1} X^k.$$

De proche en proche, on définit les polynômes dérivés successifs de  $P$  par  $P^{(k+1)}(X) = (P^{(k)}(X))'$ .

**Exemple 1.5.** Déterminer le degré et le terme dominant de  $L_n(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ .

### Proposition 4 (Formule de Taylor)

Soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . Pour tout entier  $N \geq n$  et tout  $a \in \mathbb{K}$ , on a

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \quad \text{ou encore} \quad P(X) = \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

## 1.5 Racines d'un polynôme :

### Proposition 5

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme non nul et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (1)  $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$  et  $P^{(n)}(a) \neq 0$ .
- (2)  $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X-a)^n Q(X)$  et  $Q(a) \neq 0$ .

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que  $a$  est racine d'ordre  $n$  de  $P$ .

### Proposition 6

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme non nul et  $a_1, \dots, a_n$  des réels distincts.

- On a l'équivalence suivante.

$$a_1, \dots, a_n \text{ racines de } P \iff \prod_{k=1}^n (X - a_k) \text{ divise } P(X).$$

- Si  $a_1, \dots, a_n$  sont racines de  $P$  et si  $\deg(P) = n$  alors  $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k)$  où  $\lambda$  est le coefficient dominant de  $P$ .
- Un polynôme  $P$  non nul a au plus  $\deg(P)$  racines distinctes.

**Exemple 1.6.** Démontrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$  est divisible par  $X^2 - 2X + 1$ .

**Relation coefficients/racines :** Pour trouver les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme  $P(X)$ , on écrit

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k).$$

On développe le produit, puis on identifie les coefficients. Il faut connaître les résultats suivants.

- Si  $P(X) = aX^2 + bX + c$  et si  $a_1, a_2$  sont ses racines, on a  $S = a_1 + a_2 = \frac{-b}{a}$  et  $P = a_1 a_2 = \frac{c}{a}$ .
- Si  $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$  et si  $a_1, a_2, a_3$  sont ses racines, on a

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{-b}{a}, \quad a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad a_1 a_2 a_3 = \frac{-d}{a}.$$

En effet :

**Exemple 1.7.** Déterminer les racines de  $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$  sachant que la somme de deux d'entre elles vaut la troisième.

## 1.6 Décomposition en produit de facteurs irréductibles :

### Proposition 7 (Théorème de D'Alembert)

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  possède au moins une racine complexe et donc tout polynôme non nul est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

### Proposition 8

Soit  $P(X)$  polynôme non nul de  $\mathbb{C}[X]$ . Alors  $P(X)$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i}$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sont les racines de  $P$  et  $n_1, \dots, n_r$  leurs multiplicités respectives.

### Proposition 9

Soit  $P(X)$  polynôme non nul de  $\mathbb{R}[X]$ . Alors  $P(X)$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^s (X^2 + p_j X + q_j)^{m_j}$$

avec pour tout  $j \in \{1, \dots, s\}$ ,  $p_j^2 - 4q_j < 0$ .

**Exemple 1.8.** Décomposer dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P(X) = X^5 - 1$ .