

# Chapitre 19

## Fonctions de plusieurs variables

### 19.1 Notations

Dans tout ce chapitre,  $E = \mathbb{R}^p$  est muni d'une norme que l'on note  $\|\cdot\|$ .

On considère des fonctions  $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ . On rappelle que l'ensemble de ces fonctions  $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$  muni des lois  $+$  et  $\bullet$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exemple 19.1.** Ici,  $p = 2$  et  $f : (x, y) \longmapsto \ln(2x - y) + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ . Déterminer et représenter  $D_f$ .

#### Définition 1 (Applications partielles)

On se donne une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Pour  $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ , on adopte les notations suivantes.

Si l'on fixe  $a = (a_1, \dots, a_p)_{\mathcal{B}} \in U$ , les  $p$  applications partielles de  $f$  en  $a$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont les

$$f_{x_i} : x_i \in U_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

où  $U_i = \{x_i \in \mathbb{R}, (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \in U\}$ .

**Exemple 19.2.** On reprend  $f : (x, y) \longmapsto \ln(2x - y) + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .

On munit  $\mathbb{R}^2$  de sa base canonique. On pose  $a = (1, 1)$ .

Vérifier que  $a \in D_f$ . Déterminer les applications partielles de  $f$  en  $a$  et préciser leurs ensembles de définition.

## 19.2 Continuité

On rappelle la définition de continuité vue dans le chapitre *Espaces vectoriels normés*.

### Définition 2

Soit  $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$ .

- On dit que  $f$  est continue en  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \quad \|x - a\| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

- On dit que  $f$  est continue sur  $U$  si elle l'est en tout point  $x$  de  $U$ .
- On note  $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$  qui sont continues sur  $U$ .

On a les propriétés suivantes.

- Une combinaison linéaire d'applications continues est continue et donc  $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Le produit, la composition d'applications continues est continue.

Pour montrer qu'une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, on utilise si l'on peut les opérations sur les fonctions continues. En un point  $a$  qui « pose problème », on peut essayer de trouver une majoration

$$|f(x) - f(a)| \leq g(\|x - a\|)$$

avec  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$ .

On remarque aussi que, puisqu'on est en dimension finie, toutes les normes sont « équivalentes ». On choisira celle qui convient le mieux. Sur  $\mathbb{R}^2$ , on rappelle que

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|),$$

et on utilisera par exemple les majorations suivantes.

$$|x| \leq \|(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_2, \quad |y| \leq \|(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_2 \quad \text{ou encore} \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\|(x, y)\|_2^2.$$

**Exemple 19.3.** *Etudier la continuité de l'application suivante.*

$$g : \begin{cases} (x, y) & \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \mapsto 0 \end{cases}$$

**Proposition 1**

Avec les notations précédentes, si  $f$  est continue en  $a$  alors son application partielle  $f_{x_i}$  est continue en  $a_i$ .  
Mais la réciproque est fausse.

**Preuve.**

□

**Cas où la réciproque est fausse :**

**Exercice de colle (E1)**

On considère la fonction

$$h : \begin{cases} (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

Montrer que les applications partielles de  $h$  en  $(0, 0)$  sont continues en 0 mais que  $h$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

## 19.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dans ce paragraphe, les fonctions sont définies sur des **ouverts**  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ .

### 19.3.1 Dérivées partielles

Soit  $a \in U$  et  $v \in \mathbb{R}^p$  non nul.

Puisque  $U$  est ouvert,  $\exists \delta > 0, \forall t \in ]-\delta, \delta[, a + tv \in U$ . Ainsi,

si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction

$$\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$$

est au moins définie sur  $]-\delta, \delta[$ .

#### Définition 3

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$  et  $v \in \mathbb{R}^p$  une direction non nulle.

On dit que  $f$  admet une dérivée en  $a$  selon la direction  $v$  si la fonction  $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$  est dérivable en 0 autrement dit si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_v(t) - \varphi_v(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \text{ existe.}$$

On note  $D_v(a) = \varphi_v'(0)$ .

En particulier, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ , on appelle **dérivées partielles** de  $f$  (dans la base  $\mathcal{B}$ ), les dérivées de  $f$  suivant les directions  $e_1, \dots, e_p$  (si elles existent!). On les note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  ou  $\partial_i f$ . Sous réserve d'existence, on a :

$$\begin{aligned} D_{e_i}(a) &= \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)}{t} . \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_{x_i}(a_i + t) - f_{x_i}(a_i)}{t} = f'_{x_i}(a_i) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles.

**Exemple 19.4.** En précisant où c'est possible, calculer les dérivées partielles de la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = e^{2x+y} \ln(y^2 + x).$$

**Exercice de colle (E1)**

Étudier l'existence de dérivées partielles en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  de la fonction

$$g : \begin{cases} (x, y) \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

**19.3.2 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$** **Définition 4**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point  $a$  de  $U$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$  sont continues sur  $U$ .

On note  $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$  qui sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . C'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Les opérations sur les fonctions dérivables et sur les fonctions continues donnent la proposition suivante.

**Proposition 2**

Soient  $f, g : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . On a :

- $f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .
- $f \times g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $\frac{\partial(f \times g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$ .
- Si  $g$  ne s'annule pas sur  $U$ ,  $\frac{f}{g}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $\frac{\partial(f/g)}{\partial x_i} = \frac{1}{g^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} g - f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$ .
- Si  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et si  $f(U) \subset I$  alors  $\varphi \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \times (\varphi' \circ f)$ .

On sait que si  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors en tout  $a$  de  $I$ , on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h).$$

On peut généraliser ce résultat en dimension supérieure. On admettra la proposition suivante.

**Proposition 3**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $U$  est un ouvert et si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  alors pour tout  $a \in U$ ,  $f$  admet le développement limité à l'ordre 1 suivant en  $a$  :

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + \|h\| \varepsilon(h), \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On note parfois  $\|h\| \varepsilon(h) = o(\|h\|)$ .

On définit alors l'application différentielle de  $f$  en  $a$ .

**Définition 5**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pour tout  $a \in U$ , l'application suivante est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^p$  appelée **différentielle** de  $f$  en  $a$  :

$$df(a) : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ h = (h_1, \dots, h_p) & \mapsto df(a).h = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{cases} .$$

Ainsi, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , le développement limité de  $f$  à l'ordre 1 en  $a$  s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \|h\| \varepsilon(h).$$

**Proposition 4**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , alors  $f$  est continue sur  $U$ .

**Preuve.**

□

**Exemple 19.5.** Après avoir justifié son existence, écrire le développement limité en  $a = (-1, 1, 0)$  à l'ordre 1, de

$$f : (x, y, z) \mapsto (x^2 + yz)e^z$$

**Exercice de colle (E1)**

On considère l'application  $f : x \in \mathbb{R}^p \mapsto \|x\|_2$ .

1. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U = \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ .
2. Pour tout  $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ , déterminer  $df(a)$  et écrire en justifiant le développement limité à l'ordre 1 de  $f$  en  $a$ .

**19.3.3 Règle de la chaîne****Proposition 5**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $x_1, \dots, x_p : I \rightarrow \mathbb{R}$  des applications dérivables telles que

$$\forall t \in I, \quad (x_1(t), \dots, x_p(t)) \in U.$$

Alors  $F : t \mapsto F(t) = f(x_1(t), \dots, x_p(t))$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $t \in I$ , on a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{dF}{dt}(t) = x'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_p(t)) + \dots + x'_p(t) \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1(t), \dots, x_p(t)) \\ &= \sum_{i=1}^p x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_p(t)). \end{aligned}$$

**Cas où  $p = 2$  :** La règle de la chaîne s'écrit

$$\frac{d}{dt} (f(x(t), y(t))) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

**Cas où  $p = 3$  :** La règle de la chaîne s'écrit

$$\frac{d}{dt} (f(x(t), y(t), z(t))) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)).$$

**Preuve.** Sans restreindre la généralité, on écrit cette preuve dans le cas où  $p = 2$  (**D3**).

□

On peut appliquer ce résultat aux dérivées partielles d'une application composée et démontrer la proposition suivante.

**Proposition 6**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $x_1, \dots, x_p : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in V, \quad (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)) \in U.$$

Alors  $g : (u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$  et on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (u_1, \dots, u_n) \in V \quad \frac{\partial g}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)) \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_n).$$

On retiendra le résultat de manière formelle :  $\frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$ .



Dans le cas particulier où  $n = p = 2$ , on obtient l'énoncé suivant.

**Proposition 7**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $x, y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que

$$\forall (u, v) \in V, \quad (x(u, v), y(u, v)) \in U.$$

Alors  $g : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$  et pour tout  $(u, v) \in V$ , on a

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

**Remarque :** On retiendra plus formellement :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

sachant que les dérivées partielles de  $f$  sont évaluées en  $(x(u, v), y(u, v))$  et celles de  $g, x, y$  en  $(u, v)$ .

**Passage en coordonnées polaires sur  $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .**

**Exercice de colle (E1)**

Soit  $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . Déterminer un ouvert  $U_1$  de  $\mathbb{R}^2$  pour lequel l'application  $\varphi_1$  définie par :

$$\varphi_1 : \begin{cases} U_1 & \longrightarrow & V_1 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{cases}$$

est bijective. Exprimer  $\varphi_1^{-1}$ .

**Exercice de colle (E2)**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

Exprimer les dérivées partielles de  $F$  en fonctions de celles de  $f$ .

En déduire la résolution sur  $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  de l'équation aux dérivées partielles  $(\mathcal{E}) : y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

Passage en coordonnées polaires sur  $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ .

**Exercice de colle (E3)**

**Passage en coordonnées polaires sur  $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ .** Déterminer un ouvert  $U_2$  de  $\mathbb{R}^2$  pour lequel l'application  $\varphi_2$  définie par :

$$\varphi_2 : \begin{cases} U_2 & \longrightarrow V_2 \\ (r, \theta) & \longmapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{cases}$$

est bijective et exprimer  $\varphi_2^{-1}$ .

Lorsque  $r \neq 0$ , exprimer les dérivées partielles de  $f$  en fonctions de celles de  $F$ .

**Exemple 19.6. Changement de variables affine.**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on pose

$$F(u, v) = f(au + bv, cu + dv).$$

Exprimer les dérivées partielles de  $F$  en fonctions de celles de  $f$ .

A quelle condition peut-on exprimer les dérivées partielles de  $f$  en fonctions de celles de  $F$  ?

**Proposition 8**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $U$  est un **ouvert convexe**, alors on a l'équivalence suivante.

$$f \text{ est constante} \quad \iff \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in U \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

**Preuve.**

□

### 19.3.4 Gradient

On munit  $\mathbb{R}^p$  de sa structure euclidienne usuelle et note  $\mathcal{B}$  sa base canonique. Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a

$$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}).$$

Ainsi, il existe un unique vecteur  $u \in \mathbb{R}^p$  tel que pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$ , on ait  $df(a).h = \langle u, h \rangle$ .

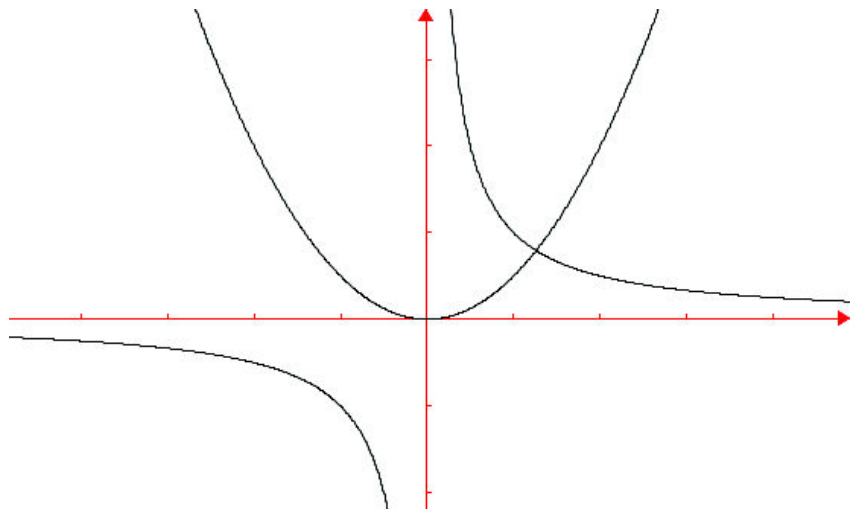
Le vecteur  $u$  dépend de  $f$  et de  $a$ , on le note  $\overrightarrow{\text{grad}}f_a$  ou encore  $\nabla f(a)$ . Ainsi

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad df(a).h = \langle \overrightarrow{\text{grad}}f_a, h \rangle = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

On peut exprimer  $\nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}}f_a$  à l'aide des dérivées partielles de  $f$  en  $a$ . En effet, puisque la base canonique est orthonormée, on a

$$df(a).h = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = \langle \overrightarrow{\text{grad}}f_a, h \rangle = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\text{grad}}f_a = \nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

**Exemple 19.7.** On considère l'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y - 2x - y^2$ .  
Après avoir justifié son existence, déterminer le gradient de  $f$  et représenter sommairement le champ de vecteurs obtenu.



## 19.4 Applications géométriques

### 19.4.1 Courbes du plan

#### Définition 6

Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On appelle courbe  $\mathcal{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  d'équation  $F(x, y) = 0$ , l'ensemble suivant.

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in V, F(x, y) = 0\}.$$

Ainsi, pour tout  $M(x, y) \in V$  on a  $M \in \mathcal{C} \iff F(x, y) = 0$ .

#### Exemple 19.8.

- Lorsque  $F$  est une application affine, on retrouve les équations de droites ( $D$ ) :  $ax + by + c = 0$ .
- Lorsque  $F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$ , on obtient le cercle de centre  $\Omega = (a, b)$  et de rayon  $R$ .

#### Définition 7 (Point régulier)

Soit  $F : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C} : F(x, y) = 0$ . Soit  $M(x, y) \in \mathcal{C}$ , on dit que  $M$  est un point régulier de  $\mathcal{C}$  si

$$\overrightarrow{\text{grad}}_F(M) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right) \neq (0, 0).$$

On dit que la courbe  $\mathcal{C}$  est régulière si tous ses points le sont.

On admet la proposition suivante.

Illustration graphique :

#### Proposition 9

Soit  $F : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C} : F(x, y) = 0$ .

Si  $M(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  est un point régulier de  $\mathcal{C}$ , alors la courbe  $\mathcal{C}$  admet une tangente en ce point dont la normale est dirigée par

$$\overrightarrow{\text{grad}}_F(M_0) \neq (0, 0).$$

#### Exercice de colle (E1)

On considère la courbe  $\mathcal{C} : 2x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 1$ .

Démontrer que cette courbe est régulière et déterminer l'équation de sa tangente en un point  $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ .

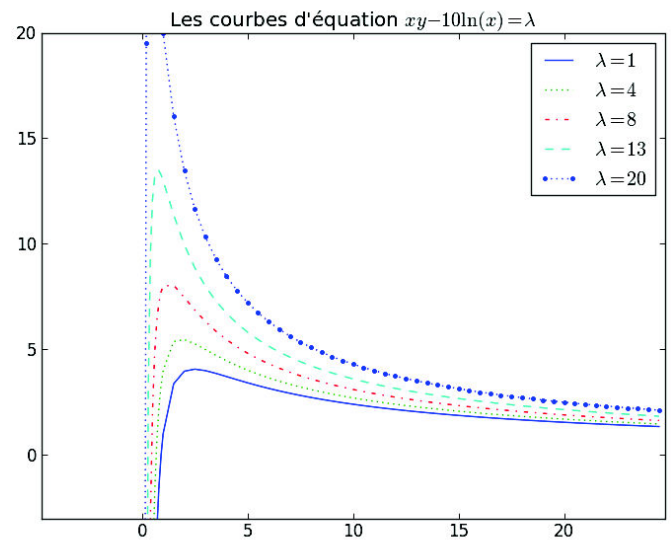
**Définition 8 (Lignes de niveau)**

Soit  $F : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On appelle lignes de niveau associées à  $F$  les courbes d'équations

$$\mathcal{C}_\lambda : F(x, y) = \lambda.$$

**Proposition 10**

Avec les notations précédentes, en un point  $M(x, y)$  de  $\mathcal{C}_\lambda$  où il est non nul, le gradient de  $F$  est orthogonal à  $\mathcal{C}_\lambda$  et orienté dans le sens des valeurs croissantes de  $\lambda$ .



**19.4.2 Surfaces**

**Définition 9**

Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On appelle surface  $\mathcal{S}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  d'équation  $F(x, y, z) = 0$ , l'ensemble suivant.

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in V, F(x, y, z) = 0\}.$$

Ainsi, pour tout  $M(x, y, z) \in V$  on a  $M \in \mathcal{S} \iff F(x, y, z) = 0$ .

**Exemple 19.9.** Lorsque  $F$  est un polynôme, on dira que  $\mathcal{S}$  est une surface algébrique. En voici des cas simples.

- Lorsque  $F$  est de degré 1, on retrouve les équations de plans  $(P) : ax + by + cz + d = 0$ .
- Si  $F(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2$ , on obtient la sphère de centre  $\Omega = (a, b, c)$  et de rayon  $R$ .

**Définition 10 (Point régulier)**

Soit  $F : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{S} : F(x, y, z) = 0$ . Soit  $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$ , on dit que  $M$  est un point régulier de  $\mathcal{S}$  si

$$\overrightarrow{\text{grad}}_F(M) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \right) \neq (0, 0, 0).$$

On dit que la surface  $\mathcal{S}$  est régulière si tous ses points le sont.

**Définition 11 (Plan tangent)**

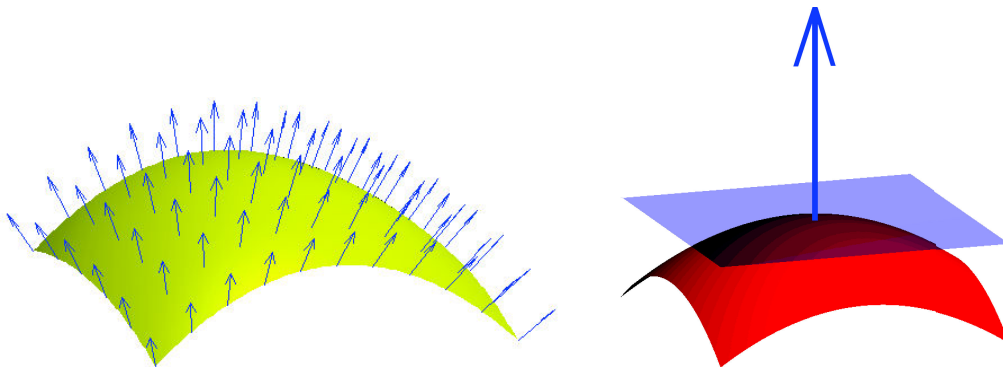
Soit  $\mathcal{S} : F(x, y, z) = 0$  un surface de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point régulier de  $\mathcal{S}$ . On appelle plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$  le plan passant par  $M_0$  et normal à

$$\overrightarrow{\text{grad}}_F(M) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Toute droite passant par  $M_0$  et contenue dans le plan tangent est tangente à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$ .

La normale à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$  est la droite normale au plan tangent et passant par  $M_0$ .

**Illustration graphique :**

**Exercice de colle (E1)**

Montrer que la surface  $\mathcal{S} : x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 9$  est régulière et déterminer l'équation de son plan tangent en  $M_0(1, 1, 1)$ .

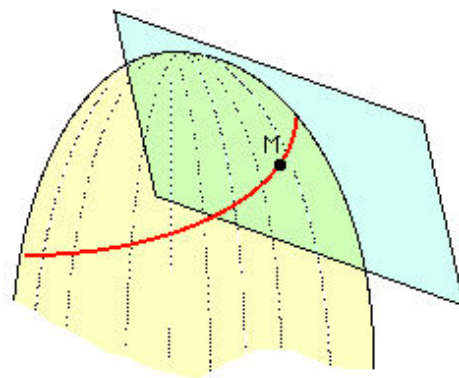


**Définition 12 (Courbe tracée sur une surface)**

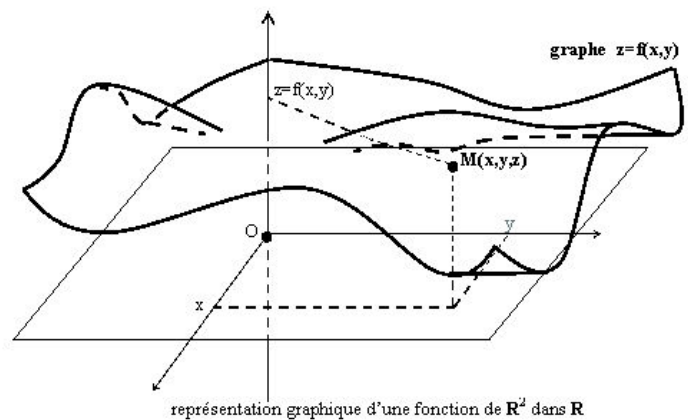
Soit  $S : F(x, y, z) = 0$  un surface de classe  $C^1$  et  $(\Gamma) : t \in I \mapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$  un arc de classe  $C^1$ . On dit que  $(\Gamma)$  est une courbe tracée sur  $S$  si pour tout  $t \in I$ ,  $M(t)$  appartient à  $S$  autrement dit si :

$$\forall t \in I, \quad F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

**Remarque 1 :** Si  $M_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  est à la fois régulier en tant que point de  $S$  et régulier en tant que point de  $(\Gamma)$ , alors la tangente à  $(\Gamma)$  en ce point est contenue dans le plan tangent à  $S$  en ce point.

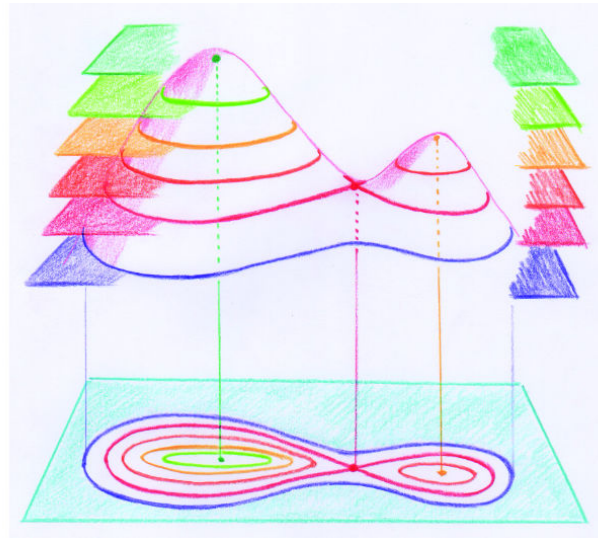
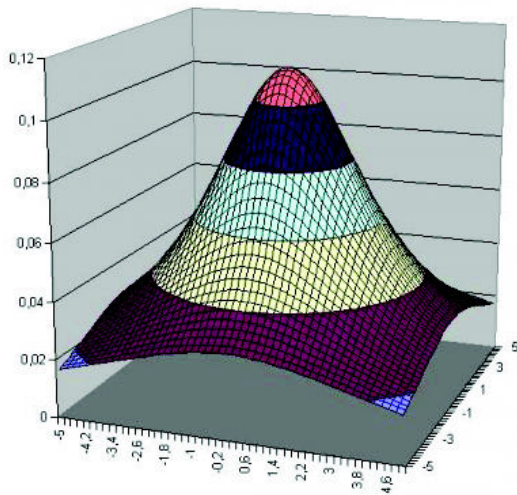


**Remarque 2 :** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , alors le graphe de la fonction  $f$  est la surface d'équation  $z = f(x, y)$ .



Si l'on coupe la surface par un plan de coordonnées  $x = x_0$  (ou  $y = y_0$ , ou  $z = z_0$ ), on obtient les **courbes coordonnées** de la surface d'équation  $z = f(x, y)$ .

- Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les courbes d'équations  $f(x, y) = \lambda$  sont les lignes de niveau (cf cartes topographiques).
- Si l'on coupe la surface par un plan de coordonnées  $x = x_0$  (ou  $y = y_0$ ), on obtient un « maillage » de la surface.



un dessin de P. Popescu-Pampu sur <http://images.math.cnrs.fr>

## 19.5 Dérivées d'ordre supérieur

### 19.5.1 Définition

Lorsqu'elle existent, les dérivées partielles de  $f$  peuvent aussi admettre des dérivées partielles. Ce sont les dérivées partielles secondes de  $f$ . On les note :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } i \neq j : \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_{i,j}^2 f \\ \text{si } i = j : \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \partial_{i,i}^2 f \end{array} \right\} \text{ il y en a } p \times p.$$

Les dérivées secondes peuvent aussi admettre des dérivées partielles (il y en aurait  $p^3$ ). On peut ainsi, de proche en proche, définir la notion de dérivées partielles d'ordre  $k$ .

#### Définition 13

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$  si elle admet des dérivées partielles à l'ordre  $k$  sur  $U$  et si ces dérivées partielles sont continues sur  $U$ .

On note  $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$  qui sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$ . C'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On admet la proposition suivante.

#### Proposition 11 (Théorème de Schwarz)

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  alors on a

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (\text{égalité de fonctions})$$

- Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$  alors

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \text{ ne dépend pas de l'ordre de dérivation.}$$

Ce théorème est admis, mais on peut le vérifier sur un exemple. On pose  $f(x, y) = (x^2 + y)e^{-x+2y}$ . Après avoir justifier leur existence, calculer les dérivées partielles secondes de  $f$ .

**Exemple 19.10.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0)$ .  
Montrer que  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 19.5.2 Développement limité à l'ordre 2

**Définition 14 (Matrice hessienne)**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U$ . Pour  $a \in U$ , on appelle matrice hessienne de  $f$  en  $a$  la matrice :

$$H_f(a) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{i,j \in \{1, \dots, p\}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U$ , par le théorème de Schwarz, la matrice  $H_f(a)$  est **symétrique**.

**Exemple 19.11.** Déterminer la matrice hessienne de la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = (x^2 + y)e^{-x+2y}$  au point  $a = (1, 1)$ .

**Exercice de colle (E2)**

On munit  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  du produit scalaire usuel et on considère l'application  $f : x \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mapsto \|x\|_2$ .

1. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ .
2. Pour tout  $a \in U$ , déterminer  $H_f(a)$ .

On admet la proposition suivante.

**Proposition 12 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U$  et  $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ .  
 Pour tout  $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que  $a + h \in U$ , on a :

$$f(a + h) = f(a) + df(a).h + \frac{1}{2}h^T H_f(a)h + \|h\|^2 \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

ou encore

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_p + h_p) = f(a) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

On note parfois  $\|h\|^2 \varepsilon(h) = o(\|h\|^2)$ .

**Illustration du produit matriciel :**

**Exemple 19.12.** Écrire le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  définie par  $f(x, y) = (x^2 + y)e^{-x+2y}$  au point  $a = (1, 1)$ .

**Exercice de colle (E3)**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U$ ,  $a \in U$  et  $v \in \mathbb{R}^p$  une direction non nulle.  
 Montrer que la fonction  $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$  est deux fois dérivable en 0 et que  $\varphi'_v(0) = df(a).v$  et  $\varphi''_v(0) = v^T H_f(a)v$ .

## 19.6 Extrema

### Définition 15

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in U$ . On dit que

- $f$  admet un maximum en  $a$  si :  $\forall x \in U, f(x) \leq f(a)$ .
- $f$  admet un minimum en  $a$  si :  $\forall x \in U, f(x) \geq f(a)$ .
- $f$  admet un maximum local en  $a$  si :  $\exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| < \delta \implies f(x) \leq f(a)$ .
- $f$  admet un minimum local en  $a$  si :  $\exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| < \delta \implies f(x) \geq f(a)$ .

Pour justifier l'existence d'un extremum, on pourra utiliser la proposition suivante (*Espaces vectoriels normés*).

### Proposition 13 (Théorème des bornes atteintes - Condition suffisante)

Si  $f : X \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur une partie fermée et bornée  $X$  de  $\mathbb{R}^p$ , alors  $f$  est bornée et elle atteint ses bornes.

### Définition 16 (Point critique)

Soit  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in U$ . On suppose que  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$ . On dit que  $a$  est un point critique de  $f$  si  $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$ , autrement dit si toutes les dérivées partielles de  $f$  s'annulent en  $a$ .

### Proposition 14 (Condition nécessaire)

Soit  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $U$  ouvert et  $a \in U$ . On a

$$f \text{ admet un extremum local en } a \implies df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}.$$

**Preuve.**

□

**Remarque 1 :** Ce résultat est faux si  $U$  n'est pas ouvert.

**Remarque 2 :** La réciproque de cette proposition est fausse.

**Plan d'étude :** Pour chercher les extrema locaux de  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  :

- On s'assure que  $U$  est ouvert et que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$
- On cherche les points critiques de  $f$  sur  $U$ . Ce sont les seuls points où  $f$  peut admettre un extremum local.
- Si  $a \in U$  est un point critique de  $f$ , on étudie le signe de  $f(a+h) - f(a)$  éventuellement pour  $h$  petit seulement,
  - Soit directement dans l'expression de  $f(a+h) - f(a)$ . On peut obtenir un extremum local ou global.
  - Soit, si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  à l'aide du développement limité à l'ordre 2 (cf Proposition 43). On obtient ici que des extrema **locaux**.

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{df(a)}_{=0} \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

**Exemple 19.13.** Déterminer les extrema de  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$ .

On pourra directement utiliser la proposition suivante.

**Proposition 15**

Soit  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  avec  $U$  ouvert et  $a \in U$  un point critique de  $f$ .

- Si  $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$  (autrement dit si les valeurs propres de  $f$  sont strictement positives) alors  $f$  admet un minimum local strict en  $a$ .
- Si  $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$  (autrement dit si au moins une valeur propre de  $f$  est strictement négative) alors  $f$  n'admet pas de minimum local en  $a$ .
- Si  $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$  (autrement dit si les valeurs propres de  $f$  sont strictement négatives) alors  $f$  admet un maximum local strict en  $a$ .
- Si  $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$  (autrement dit si au moins une valeur propre de  $f$  est strictement positive) alors  $f$  n'admet pas de maximum local en  $a$ .

**Le raisonnement suivant est à maîtriser :**

On reprend l'exemple précédent. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui est ouvert.

La matrice hessienne de  $f$  en  $(x, y)$  est  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  (indépendante de  $x, y$ ).

En particulier  $H_f(-2, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Elle est symétrique réelle donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On note  $\alpha, \beta$  ses valeurs propres :

- $\alpha\beta = \det(H_f(-2, 2)) = 3 > 0$  donc  $\alpha, \beta$  sont non nulles et de même signe.
- $\alpha + \beta = \text{tr}(H_f(-2, 2)) = 4 > 0$  donc  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

On en déduit que  $H_f(-2, 2) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .

En effet, par le théorème spectral, il existe  $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}H_f(-2, 2)P = P^T H_f(-2, 2)P = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ .

Soit  $h \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$h^T H_f(a) h = h^T P D P^T h = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } P^T h = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Et donc  $h^T H_f(a) h = \alpha k_1^2 + \beta k_2^2 \geq 0$ . Ainsi,  $H_f(-2, 2) \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ .



De plus, si  $h^T H_f(a)h = \alpha k_1^2 + \beta k_2^2 = 0$  alors  $\alpha k_1^2 = \beta k_2^2 = 0$  et comme  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , on obtient  $P^T h = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$ .

Or  $P^T$  est inversible donc  $h = 0$ . Finalement  $H_f(-2, 2) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .

Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ , et puisque  $a = (-2, 2)$  est un point critique de  $f$ , la proposition 15 donne

$f$  admet un seul extremum local, c'est un minimum local et c'est en  $(-2, 2)$ .

**Remarque :** avec cette rédaction, on travaille au **voisinage** du point critique, et donc on ne démontre pas qu'il s'agit d'un extremum global.

**Exercice de colle (E2)**

Déterminer les extrema locaux de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ .  
 $f$  admet-elle des extrema locaux ou globaux?

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer les extrema locaux et globaux sur  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$