

Chapitre 17

Équation différentielles linéaires scalaires

17.1 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Définition 1

Soient $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues sur un intervalle I . On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante.

$$(\mathcal{E}) : ay' + by = c.$$

Une solution de (\mathcal{E}) est un couple (J, y) où $J \subset I$ est un intervalle et $y : J \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable et vérifie :

$$\forall t \in J, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

On dit aussi que y est une solution sur J de (\mathcal{E}) . Les solutions sont parfois identifiées à leurs graphes et appelées courbes intégrales associées à (\mathcal{E}) .

On dit que (\mathcal{E}) est homogène si $c = 0$ et on note (\mathcal{E}_0) l'équation homogène associée à (\mathcal{E}) .

$$(\mathcal{E}_0) : ay' + by = 0.$$

On dit que (\mathcal{E}) est à coefficients constants si a et b sont des fonctions constantes.

- **Cas où a ne s'annule pas sur I :** On peut alors diviser l'équation par a . Les fonctions $\alpha = \frac{b}{a}$ et $\beta = \frac{c}{a}$ sont alors continues sur I et on est ramené aux équations différentielles suivantes.

$$(\mathcal{E}) : y' + \alpha y = \beta \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}_0) : y' + \alpha y = 0.$$

- **Problème de Cauchy.** C'est un système de la forme

$$\begin{cases} y' + \alpha y = \beta, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I \text{ et } y_0 \in \mathbb{K} \text{ sont donnés.}$$

Proposition 1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Si α et β sont continues sur I , alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + \alpha y = \beta, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

Géométriquement : les courbes intégrales ne se coupent pas.

Illustration graphique :

• **Résolution de (\mathcal{E}_0) .**

Soit A une primitive de α sur I (elle existe bien car α est continue sur I). On a alors les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad y'(t) + \alpha(t)y(t) = 0 &\iff \forall t \in I, \quad e^{A(t)}y'(t) + A'(t)e^{A(t)}y(t) = 0, \\ &\iff \forall t \in I, \quad \left(e^{A(t)}y(t) \right)' = 0, \\ &\iff \exists C \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad e^{A(t)}y(t) = C, \\ &\iff \exists C \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad y(t) = Ce^{-A(t)}. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les $y : t \in I \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante. L'ensemble des solutions est alors la droite vectorielle engendrée par $t \mapsto e^{-A(t)}$.

• **Résolution de (\mathcal{E}) .**

Soit y_1 une solution particulière (le théorème de Cauchy-Lipschitz en donne l'existence). On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad y'(t) + \alpha(t)y(t) = \beta(t) &\iff \forall t \in I, \quad y'(t) + \alpha(t)y(t) = \beta(t) = y_1'(t) + \alpha(t)y_1(t), \\ &\iff \forall t \in I, \quad (y - y_1)'(t) + \alpha(t)(y - y_1)(t) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, y est une solution de (\mathcal{E}) sur I si et seulement si $y - y_1$ est une solution de (\mathcal{E}_0) sur I .

Les solutions sont donc les $y : t \in I \mapsto Ce^{-A(t)} + y_1(t)$ où C est une constante numérique. L'ensemble des solutions est alors une droite affine dirigée par $t \mapsto e^{-A(t)}$.

Remarque : pour trouver une solution particulière, on peut faire « varier la constante C » et chercher une solution sous la forme $y_1(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où C est dérivable sur I .

• **Problèmes de raccordements :**

Si a s'annule un nombre fini de fois sur I , on détermine dans un premier temps les solutions sur les intervalles où a ne s'annule pas. On cherche ensuite les solutions définies sur I tout entier (il n'en existe pas toujours). On cherche alors à raccorder les fonctions trouvées en première étape, pour obtenir une fonction **continue, dérivable sur I** . On pourra pour cela soit revenir à la définition de continuité et de dérivabilité, soit utiliser un développement limité à l'ordre 1 en les points où a s'annule.

Remarques : Si a s'annule sur I ,

- le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pas valable sur I mais seulement sur chacun des intervalles où a ne s'annule pas,
- bien que l'équation différentielle soit d'ordre 1, l'espace affine (espace vectoriel translaté d'un vecteur) des solutions sur I peut-être de n'importe quelle dimension, il peut même être vide.

Exemple 17.1. Résoudre $\mathcal{E} : ty' + (1-t)y = 1$.

• **Résolution de l'équation homogène :**

- Rédaction 1 : Recherche d'une solution particulière et application du cours

- Rédaction 2 : Raisonnement par équivalences

- Etude des raccords :

17.2 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

17.2.1 Résolution de l'équation homogène

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle suivante.

$$(\mathcal{E}_{\mathbb{K}}) : y'' + ay' + by = 0$$

Dans la suite, on appelle **équation caractéristique** associée à $(\mathcal{E}_{\mathbb{K}})$, l'équation de degré 2 suivante :

$$(EC) : r^2 + ar + b = 0,$$

et on note $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

- **Si $\Delta = 0$** alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = 0$ possède une solution double $r_0 \in \mathbb{C}$, et les solutions (complexes) de (\mathcal{E}_0) sur \mathbb{R} sont les $t \in \mathbb{R} \mapsto (At + B)e^{r_0 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto Ate^{r_0 t} + Be^{r_0 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{C} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto te^{r_0 t}, t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_0 t} \right\}.$$

- Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation $z^2 = \Delta$ possède deux solutions distinctes $+\delta$ et $-\delta$ dans \mathbb{C} (ce sont les racines carrées de Δ , mais attention la notation $\sqrt{\quad}$ est exclusivement réservée aux réels positifs). L'équation $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = 0$ possède alors deux solutions (complexes) distinctes :

$$r_1 = \frac{-a + \delta}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a - \delta}{2}.$$

Les solutions (complexes) de (\mathcal{E}_0) sur \mathbb{R} sont les $t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{C} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_1 t}, t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_2 t} \right\}.$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

On peut toujours étudier les fonctions **complexes** solutions et utiliser le premier cas. Mais si l'on cherche les fonctions **réelles** solutions, trois cas seront à distinguer.

- Si $\Delta = 0$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = 0$ possède une solution double $r_0 \in \mathbb{R}$, et les solutions réelles de (\mathcal{E}_0) sur \mathbb{R} sont les $t \in \mathbb{R} \mapsto (At + B)e^{r_0 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto Ate^{r_0 t} + Be^{r_0 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto te^{r_0 t}, t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_0 t} \right\}.$$

- Si $\Delta > 0$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = 0$ possède alors deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de (\mathcal{E}_0) sur \mathbb{R} sont les $t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_1 t}, t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_2 t} \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = 0$ possède deux racines complexes distinctes et conjuguées $z = \alpha \pm i\theta$.

Les solutions complexes de $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}})$ sur \mathbb{R} sont les $t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{(\alpha+i\theta)t} + Be^{(\alpha-i\theta)t} = e^{\alpha t}(Ae^{i\theta t} + Be^{-i\theta t})$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions réelles de $(\mathcal{E}_{\mathbb{R}})$ sur \mathbb{R} sont les $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t}(C \cos(\theta t) + D \sin(\theta t))$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{Sol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) &= \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{\alpha t} \cos(\theta t) + Be^{\alpha t} \sin(\theta t) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \cos(\theta t), t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \sin(\theta t) \right\} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a la proposition suivante.

Proposition 2

Pour tous $a, b \in \mathbb{K}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_{\mathbb{K}}) : y'' + ay' + by = 0$$

est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2.

On retiendra enfin le résultat particulier suivant, utile dans d'autres disciplines scientifiques.

Proposition 3

Soit ω un réel **non nul**. Les solutions de $(\mathcal{E}) : y'' + \omega^2 y = 0$ sont les (trois façons différentes de les décrire) :

- $y : t \in \mathbb{R} \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
- $y : t \in \mathbb{R} \mapsto C \cos(\omega t + \varphi)$ avec $(C, \varphi) \in \mathbb{R}^2$
- $y : t \in \mathbb{R} \mapsto D \sin(\omega t + \psi)$ avec $(D, \psi) \in \mathbb{R}^2$

Proposition 4

Soit ω un réel **non nul**. Les solutions de $(\mathcal{E}) : y'' - \omega^2 y = 0$ sont les (deux façons différentes de les décrire) :

- $y : t \in \mathbb{R} \mapsto A \operatorname{ch}(\omega t) + B \operatorname{sh}(\omega t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
- $y : t \in \mathbb{R} \mapsto C e^{\omega t} + D e^{-\omega t}$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$

17.2.2 Recherche de solutions particulières

On s'intéresse ici à une équation différentielle du type suivant.

$$(\mathcal{E}) : y'' + ay' + by = P(t)e^{\alpha t}$$

avec P polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.

L'équation caractéristique associée est

$$(EC) : r^2 + ar + b = 0.$$

- Si α n'est pas solution de (EC) , on peut trouver une solution de (\mathcal{E}) sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ où $Q(t)$ est un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P)$.
- Si α est solution de (EC) , on ajoute au degré de Q autant que sa multiplicité.

Exemple 17.2. Chercher une solution particulière de $(\mathcal{E}_1) : y' = 2y + t + 1$.

Exemple 17.3. Chercher une solution particulière de $(\mathcal{E}_1) : y' + y = 2e^{-t}$.

Exemple 17.4. Chercher une solution particulière de $(\mathcal{E}_3) : y'' - 3y' + 2y = t^2 + 1$.

Exemple 17.5. Chercher une solution particulière de $(\mathcal{E}_4) : y'' - 3y' + 2y = te^t$.

Remarque : Lorsque le second membre est de la forme $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ et que $i\omega$ n'est pas solution de (EC) , on cherchera une solution sous la forme

$$y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Exemple 17.6. Chercher une solution particulière de $(\mathcal{E}_5) : y'' - y = \sin(t)$.

17.3 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 (cas général)

17.3.1 Structure des solutions

Définition 2

Soient $a, b, c, d : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues sur un intervalle I . On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante.

$$(\mathcal{E}) : \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t).$$

Une solution de (\mathcal{E}) est un couple (J, y) où $J \subset I$ est un intervalle et $y : J \rightarrow \mathbb{K}$ est deux fois dérivable et vérifie :

$$\forall t \in J, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t).$$

On dit aussi que y est une solution sur J de (\mathcal{E}) . Les solutions sont parfois identifiées à leurs graphes et appelées courbes intégrales associées à (\mathcal{E}) .

On dit que (\mathcal{E}) est homogène si $d = 0$ et on note (\mathcal{E}_0) l'équation homogène associée à (\mathcal{E}) .

$$(\mathcal{E}_0) : \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0.$$

On dit que (\mathcal{E}) est à coefficients constants si a, b et c sont des fonctions constantes.

Proposition 5 (Théorème de Cauchy Lipschitz linéaire)

Si a, b, c, d sont **continues** sur I et si a **ne s'annule pas** sur I alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

Géométriquement : les courbes intégrales ne peuvent pas se couper avec une même tangente.

Soit $J \subset I$ un intervalle, on note $\text{Sol}_J(\mathcal{E})$ l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) sur J et $\text{Sol}_J(\mathcal{E}_0)$ l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}_0) sur J . Sous les **mêmes hypothèses que dans le théorème de Cauchy-Lipschitz**, on a la proposition suivante qui précise la structure des ensembles solutions.

Proposition 6 (Théorème de structure des solutions)

L'ensemble $\text{Sol}_J(\mathcal{E}_0)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2 et pour tout $t_0 \in J$, l'application

$$\theta_{t_0} : \begin{cases} \text{Sol}_J(\mathcal{E}_0) & \longrightarrow & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Et donc $\boxed{\text{Sol}_J(\mathcal{E}_0) \text{ est un espace vectoriel de dimension 2.}}$

La solution générale de (\mathcal{E}) est somme d'une solution particulière et de la solution générale de (\mathcal{E}_0) .

Preuve. On montre d'abord que $\text{Sol}_J(\mathcal{E}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(J, \mathbb{K})$.

□

Exercice de colle (E1)

Trouver les fonctions puissances solutions de $(\mathcal{E}_0) : x^2 y'' + xy' - y = 0$.

En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : x^2 y'' + xy' - y = x^2$ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

17.3.2 Recherche de solutions développables en série entière

Exercice de colle (E2)

Soit (\mathcal{E}) l'équation différentielle $xy'' + 2y' - xy = 0$.

Trouver les solutions f de (\mathcal{E}) développables en série entière au voisinage de 0 et telles que $f(0) = 1$, puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

17.3.3 Résolution par la méthode de Lagrange (variation de la constante)

En dehors du cas où a, b, c sont constantes, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Cependant, dans le cas particulier suivant, on peut se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1, que l'on sait résoudre.

Soit $(\mathcal{E}) : ay'' + by' + cy = d$ où $a, b, c, d : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues et où a ne s'annule pas sur I .

On suppose que :

on dispose d'une solution particulière y_1 de $(\mathcal{E}_0) : ay'' + by' + cy = 0$, qui **ne s'annule pas sur I** .

On a donc :

$$\forall t \in I : \quad \begin{aligned} & * \quad y_1(t) \neq 0, \\ & * \quad a(t)y_1''(t) + b(t)y_1'(t) + c(t)y_1(t) = 0. \end{aligned}$$

De plus, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto cy_1(t)$ est aussi solution de (\mathcal{E}_0) sur I . Pour résoudre (\mathcal{E}) , on « fait varier cette constante ». Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I . On pose $z = \frac{y}{y_1}$, c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \quad y(t) = z(t)y_1(t).$$

Alors z est aussi deux fois dérivable sur I et on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} y &= zy_1, \\ y' &= z'y_1 + zy_1', \\ y'' &= z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } y \text{ solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } I & \iff a(z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'') + b(z'y_1 + zy_1') + c(zy_1) = d, \\ & \iff ay_1z'' + (2ay_1' + by_1)z' + \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0}z = d, \\ & \iff ay_1(z')' + (2ay_1' + by_1)z' = d. \end{aligned}$$

En posant $Z = z'$, on est donc amené à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante.

$$(\mathcal{E}_1) : \quad ay_1Z' + (2ay_1' + by_1)Z = d.$$

Exemple 17.7. Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) : \quad ty'' - y' + (1 - t)y = 2e^{-t}.$$

On pourra d'abord trouver une solution particulière simple.

