

Chapitre 16

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

16.1 Norme sur un espace vectoriel

16.1.1 Définitions

Définition 1

On appelle norme sur E , toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (1) positivité : $\forall x \in E, N(x) \geq 0$,
- (2) caractère défini : $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$,
- (3) homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$,
- (4) inégalité triangulaire : $\forall x \in E, \forall y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Remarques :

- Dans la troisième assertion, si l'on choisit $\lambda = 0$, on obtient $N(0) = 0$.
- Pour montrer qu'un vecteur de E est nul, il faut et il suffit de démontrer que sa norme est nulle.

Définition 2

On appelle espace vectoriel normé tout espace vectoriel muni d'une norme N .

On note parfois $N(x) = \|x\|$.

Exemple 16.1. Si $E = \mathbb{R}$, on peut considérer l'application N suivante.

$$N : x \in \mathbb{R} \mapsto N(x) = |x|$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une norme. Ainsi, \mathbb{R} , muni de la valeur absolue, est un espace vectoriel normé.

Définition 3

On appelle distance sur E , toute application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (1) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) \geq 0$,
- (2) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = 0 \implies x = y$,
- (3) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = d(y, x)$,
- (4) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Proposition 1

On suppose que E est un espace vectoriel normé et on note $N(x) = \|x\|$.
L'application suivante est une distance sur E .

$$d : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$$

On l'appelle **distance associée à N sur E** .

Preuve. On vérifie les quatre assertions qui définissent une distance.

Soient x, y et z des éléments de E . On a :

- (1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$,
- (2) $d(x, y) = 0 \implies \|x - y\| = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y$,
- (3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y, x)$,
- (4) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

□

Exemple 16.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que $\forall (x, y) \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.

16.1.2 Norme associée à un produit scalaire

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On rappelle quelques énoncés vus dans les chapitres précédents.

Définition 4 (Produit scalaire)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application

$$\varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle \end{cases}$$

vérifiant les propriétés suivantes.

- (1) φ est bilinéaire,
- (2) φ est symétrique,
- (3) φ est définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Proposition 2

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $x \in E \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E , appelée **norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$** .

Exemple 16.3. • Sur \mathbb{R}^p muni du produit scalaire usuel, l'application suivante est une norme :

$$N : x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$$

• Sur $M_p(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, l'application suivante est une norme :

$$N : M \mapsto \sqrt{\langle M, M \rangle} = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$$

• Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, l'application suivante est une norme :

$$N : f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

16.1.3 Normes usuelles sur \mathbb{K}^p .

Proposition 3

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on pose $N_1(x) = \sum_{i=1}^p |x_i|$.

Alors, l'application N_1 est une norme sur \mathbb{K}^p .

Preuve. (D1)

□

Proposition 4

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on pose $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_i|^2}$.

Alors, l'application N_2 est une norme sur \mathbb{K}^p .

Preuve. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on reconnaît la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^p .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on adapte la preuve :

(1) et (2) : Pour tout $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, on a $N_2(z) = \sqrt{\sum_{i=1}^p |z_i|^2} \geq 0$. Et si $N_2(z) = \sqrt{\sum_{i=1}^p |z_i|^2} = 0$ (somme nulle de nombres positifs) alors pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|z_i| = 0$ et donc $z_i = 0$. On a bien $z = 0$.

(3) : Pour tout $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$N_2(\lambda z) = \sqrt{\sum_{i=1}^p |\lambda z_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^p |\lambda|^2 \cdot |z_i|^2} = \sqrt{|\lambda|^2} N_2(z) = |\lambda| N_2(z).$$

(4) : Soient $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ et $z' = (z'_1, \dots, z'_p) \in \mathbb{C}^p$. On montre que $N_2(z + z')^2 \leq (N_2(z) + N_2(z'))^2$.

D'une part, on a les égalités suivantes.

$$N_2(z + z')^2 = \sum_{i=1}^p |z_i + z'_i|^2 = \sum_{i=1}^p (z_i + z'_i)(\bar{z}_i + \bar{z}'_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^p |z_i|^2}_{=N_2(z)^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^p |z'_i|^2}_{=N_2(z')^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^p (z_i \bar{z}'_i + \bar{z}_i z'_i)}_{=A(z, z') \in \mathbb{R}}$$

D'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = N_2(z + \lambda z')^2 = N_2(z)^2 + \lambda A(z, z') + \lambda^2 N_2(z')^2 \geq 0$. C'est un polynôme à coefficients réels, de degré 2 (sauf si $z' = 0$, mais dans ce cas, il n'y a plus rien à démontrer) et de signe constant sur \mathbb{R} . Et donc son discriminant est négatif ou nul :

$$\Delta = A(z, z')^2 - 4N_2(z)^2 N_2(z')^2 \leq 0.$$

On a $A(z, z') \leq |A(z, z')| \leq 2N_2(z)N_2(z')$ donc $N_2(z + z')^2 \leq N_2(z)^2 + 2N_2(z)N_2(z') + N_2(z')^2 = (N_2(z) + N_2(z'))^2$, ce qu'on voulait démontrer. □

Proposition 5

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on pose $N_\infty(x) = \max_{i \in \{1, \dots, p\}} |x_i|$.

Alors, l'application N_∞ est une norme sur \mathbb{K}^p .

Preuve. (D1)

□

16.1.4 Normes usuelles sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ **Proposition 6**

Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on pose $\mathcal{N}_1(f) = \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.

Alors, l'application \mathcal{N}_1 est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ appelée **norme de la convergence en moyenne**.

Preuve. (D2)

□

Rappels sur la borne supérieure

Proposition 7 (borne supérieure)

Soit A une partie de \mathbb{R} .

- On appelle, si elle existe, borne supérieure de A , le plus petit de ses majorants. On la note $\sup(A)$.
- Si A est une partie **non vide** et **majorée** de \mathbb{R} , alors A possède une borne supérieure.

Proposition 8

Soit A une non vide et majorée de \mathbb{R} . La borne supérieure M de A est complètement définie par l'une des assertions suivantes (équivalentes entre elles) :

- (1) Pour tout $a \in A$, on a $a \leq M$, et il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = M$.
- (2) Pour tout $a \in A$, on a $a \leq M$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon \leq a$.

On pourra utiliser le lemme suivant sans le démontrer (la preuve est dans le chapitre *Suites et séries de fonctions*)

Lemme

Si A est une partie non vide de \mathbb{R} et majorée de \mathbb{R} , et si λ est un réel **positif** alors :

$$\sup(\lambda.A) = \sup_{a \in A}(\lambda a) = \lambda \sup(A).$$

Proposition 9

Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on pose $\mathcal{N}_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$.

Alors, l'application \mathcal{N}_∞ est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ appelée **norme uniforme**.

Preuve. (D2)

□

16.1.5 Comparaison de normes

Définition 5

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni de deux normes N et N' . On dit que

- La norme N **domine** la norme N' , s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad N'(x) \leq kN(x).$$

- Les normes N et N' sont **équivalentes** si N domine N' et si N' domine N , autrement dit, s'il existe $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad k_1 N(x) \leq N'(x) \leq k_2 N(x).$$

Exercice de colle (E1)

Soit $E = \mathbb{K}^n$, on note les normes N_1, N_2 et N_∞ les normes usuelles. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x) \leq nN_\infty(x).$$

Exercice de colle (E3)

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on note les normes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ et \mathcal{N}_∞ les normes usuelles. Montrer que \mathcal{N}_2 domine \mathcal{N}_1 , que \mathcal{N}_∞ domine \mathcal{N}_2 , mais que \mathcal{N}_∞ n'est pas dominée par \mathcal{N}_1 .

- \mathcal{N}_2 domine \mathcal{N}_1 et plus précisément, on a :

$$\forall f \in E, \quad \mathcal{N}_1(f) \leq \sqrt{b-a} \mathcal{N}_2(f).$$

En effet : si $f \in E$ alors

- \mathcal{N}_∞ domine \mathcal{N}_2 et plus précisément, on a :

$$\forall f \in E, \quad \mathcal{N}_2(f) \leq \sqrt{b-a} \mathcal{N}_\infty(f).$$

En effet :

Cependant, on peut voir qu'il n'y a aucune équivalence entre les normes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ et \mathcal{N}_∞ . Par exemple, on montre par l'absurde que \mathcal{N}_∞ n'est pas dominée par \mathcal{N}_1 .

Supposons au contraire qu'il existe $k > 0$ tel que $\mathcal{N}_\infty \leq k\mathcal{N}_1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie par $f_n(t) = (t-a)^n$.

Calculons $\mathcal{N}_1(f_n)$:

Calculons $\mathcal{N}_\infty(f_n)$:

Obtenons une contradiction :

L'exemple précédent montre que toutes les normes d'un espace vectoriel ne sont pas équivalentes. On admettra cependant la proposition suivante.

Proposition 10

Sur un espace vectoriel E de **dimension finie** toutes les normes sont équivalentes.

16.1.6 Normes subordonnées (hors-programme)

Dans ce paragraphe, on se donne une norme $\| \cdot \|$ sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et à partir de cette norme, on en construit une sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appelée norme subordonnée à $\| \cdot \|$.

Exercice de colle (E3)

On considère l'application $\mathcal{N} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{N}(A) = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|.$

1. Justifier l'existence de $\mathcal{N}(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que \mathcal{N} est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{N}(AB) \leq \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.

On dit alors que \mathcal{N} est une norme d'algèbre.

16.2 Premières notions de topologie

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé. On notera $\|x\|$ la norme d'un vecteur x de E .

16.2.1 Boules, sphères

Définition 6

Soit $a \in E$ et $r > 0$. On définit :

- Boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\} = \{x \in E, \|x - a\| < r\}.$$

- Boule fermée de centre a et de rayon r :

$$\bar{B}(a, r) = B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\} = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}.$$

- Sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a, r) = \{x \in E, d(a, x) = r\} = \{x \in E, \|x - a\| = r\}.$$

Exemple 16.4. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni successivement des normes N_1, N_2, N_∞ , on pose $a = (0, 0) = 0$.

Cas où $N = N_1$:

$$\text{on a } (x, y) \in \bar{B}(0, r) \iff |x| + |y| \leq r.$$

Cas où $N = N_2$:

$$\text{on a } (x, y) \in \bar{B}(0, r) \iff x^2 + y^2 \leq r^2.$$

Cas où $N = N_\infty$:

$$\text{on a } (x, y) \in \bar{B}(0, r) \iff \max\{|x|, |y|\} \leq r.$$

16.2.2 Parties bornées

Définition 7

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . On dit que A est **bornée**, s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M,$$

autrement dit tel que $A \subset \overline{B}(0, M)$.

Illustration graphique :

Remarque importante :

La définition de partie bornée dépend du choix de la norme sur E . Ainsi, une partie A peut être bornée pour une norme N et pas bornée pour une autre norme N' .

On a cependant de manière immédiate la proposition suivante.

Proposition 11

- Soient N et N' sont deux normes **équivalentes** d'un espace vectoriel E et A une partie de E alors :

$$A \text{ est une partie bornée de } (E, N) \iff A \text{ est une partie bornée de } (E, N')$$

- Si E est de dimension finie, le caractère borné d'une partie ne dépend pas de la norme choisie sur E .

Exercice de colle (E1)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule $B(a, r)$ est une partie bornée de E .

Soit $x \in B(a, r)$, on a donc $\|a - x\| < r$. Ainsi, on a les majorations suivantes.

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x - a) + a\|, \\ &\leq \|x - a\| + \|a\|, \\ &\leq r + \|a\|. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on pose $M = r + \|a\|$, on a bien :

$$\forall x \in B(a, r), \quad \|x\| \leq M.$$

Donc $B(a, r)$ est une partie bornée de E .

Définition 8

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On dit que la suite vectorielle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée si l'ensemble de ses valeurs est une partie bornée de E , autrement dit si :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leq M.$$

Définition 9

Soient A un ensemble, E un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application de A dans E . On dit que f bornée si l'ensemble de ses valeurs est une partie bornée de E , autrement dit si :

$$\exists M > 0, \forall x \in A, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Exemple 16.5. On munit \mathbb{R}^2 de la norme 1.

Montrer que la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (e^{-x^2} + \sin(y), \text{Arctan}(x + y))$ est bornée.

Remarque : On note $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des applications $f : A \rightarrow E$ qui sont bornées et pour tout $f \in \mathcal{B}(A, E)$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|.$$

Montrons qu'il s'agit d'une norme.

16.2.3 Parties convexes

Définition 10

Soient A une partie de E . On dit que A est **convexe** si :

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad [a, b] \subset A$$

c'est-à-dire :

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda a + (1 - \lambda)b \in A.$$

Illustration graphique :

$$\begin{aligned} x \in (a, b) &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{bx} = \lambda \vec{ba} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, x - b = \lambda(a - b) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda a + b(1 - \lambda) \end{aligned}$$

$$x \in [a, b] \iff \exists \lambda \in [0, 1], x = \lambda a + b(1 - \lambda)$$

Exercice de colle (E2)

Une boule fermée (ou ouverte) est une partie convexe.

16.3 Suites d'un espace vectoriel normé

16.3.1 Définitions

Définition 11

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Le vecteur ℓ est appelé **vecteur limite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Exemple 16.6. On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne usuelle et on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n} \right).$$

On a alors $\|u_n\|^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4^n} \leq \frac{2}{n^2}$ dès que $n \geq 2$.

Ainsi $\|u_n - (0, 0)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0$. Par définition de cette limite, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \frac{\sqrt{2}}{n} \leq \varepsilon.$$

Les majorations précédentes donnent bien $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \|u_n - (0, 0)\| \leq \varepsilon$. C'est la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (0, 0)$.

On remarque que, par définition de la limite, on a l'équivalence suivante.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$$

Remarque importante :

La notion de convergence dépend du choix de la norme sur E . Ainsi, une suite peut être convergente pour une norme N et divergente pour une autre norme N' .

On a cependant de manière immédiate la proposition suivante.

Proposition 12

- Soient N et N' sont deux normes **équivalentes** d'un espace vectoriel E et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Alors :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ dans } (E, N) \iff (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ dans } (E, N')$$

- Si E est de dimension finie, la nature d'une suite d'éléments de E ne dépend pas de la norme choisie sur E .

Proposition 13

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .
Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est unique.

Preuve.

□

Proposition 14

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .
Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Preuve.

□

On pourrait également démontrer les propositions suivantes.

Proposition 15

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .
Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors ses suites extraites aussi et elles ont même limite.

Proposition 16

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E .
Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' , alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est $\lambda \ell + \mu \ell'$.
Autrement dit, l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

Plus généralement, on admet aussi la proposition suivante.

Proposition 17

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' . Soient aussi $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques convergeant respectivement vers a et b .
Alors la suite vectorielle $(\alpha_n u_n + \beta_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est $a\ell + b\ell'$.

Exemple 16.7. (E2) Méthode 1 - On considère (et on la retrouvera ensuite !) la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$.
Calculer le polynôme caractéristique de A .

$$\chi_A(\lambda) =$$

En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de A et de I_2 .

Déterminer alors si elle existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$.

Exemple 16.8. Un exemple en dimension infinie

On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni des normes \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_∞ .

On définit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par : $\forall t \in [0, 1], f_n(t) = t^n$.

- Convergence pour la norme \mathcal{N}_1 :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}_1(f_n - 0) = \int_0^1 |f_n(t) - 0| dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle dans (E, \mathcal{N}_1) .

- Convergence pour la norme \mathcal{N}_∞ :

On remarque tout d'abord que la convergence pour la norme \mathcal{N}_∞ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est exactement la convergence **uniforme** vue dans le chapitre *Séries de fonctions*.

$$\begin{aligned} (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } f \text{ dans } (E, \mathcal{N}_\infty) &\iff \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\iff (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a, b] \end{aligned}$$

Ici, $[a, b] = [0, 1]$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g définie par $g(1) = 1$ et $g(t) = 0$ si $t \in [0, 1[$.

Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergerait uniformément, ce serait vers sa limite simple g . Et comme les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$, la limite uniforme g le serait aussi. Ce qui n'est évidemment pas le cas.

Ainsi, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans (E, \mathcal{N}_∞) .

16.3.2 En dimension finie, caractérisation à l'aide des suites coordonnées

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Pour $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$, on pose $N_{\mathcal{B}}(x) = \max_{i \in \{1, \dots, p\}} |x_i|$ et $N'_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{i=1}^p |x_i|$.

On démontrerait facilement qu'il s'agit de deux normes sur E .

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E , on peut écrire chacun des u_n dans la base \mathcal{B} .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^p u_{n,i} e_i.$$

Les p suites numériques $(u_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelées **suites coordonnées** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base \mathcal{B} . Avec ces notations, on montre la proposition suivante.

Proposition 18

On a l'équivalence suivante.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, (u_{n,i})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}.$$

Et dans ce cas, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i$ avec $\ell_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,i}$.

Preuve. Puisque E est de dimension finie, la nature de la suite ne dépend pas du choix de la norme.

- Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On choisit la norme $N_{\mathcal{B}}$ définie précédemment.

- Supposons que toutes les suites coordonnées $(u_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. On choisit la norme N'_B définie précédemment.

Exemple 16.9. (E2) Méthode 2 - On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice inversible P de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \star & \star \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^n (exprimer ses coefficients) et retrouver la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$.

16.4 Parties ouvertes, parties fermées, parties denses

16.4.1 Points intérieurs, parties ouvertes

Définition 12

Soit A une partie de E et a un vecteur de A .

On dit que a est un point intérieur à A si :

$$\exists r > 0, \quad B(a, r) \subset A$$

ou encore si

$$\exists r > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - a\| < r \implies x \in A.$$

Illustration graphique :

Exemple 16.10. Soit $a \in A$ un point intérieur à A et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers a . Montrer qu'à partir d'un certain rang, u_n est dans A .

Définition 13

Soit A une partie de E .

On appelle intérieur de A l'ensemble de ses points intérieurs.

On le note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A .

Remarque : On a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Définition 14

Soit U une partie de E .

On dit que U est une partie ouverte de E si chacun de ses points lui est intérieur, autrement dit si :

$$\forall a \in U, \quad \exists r > 0, \quad B(a, r) \subset U$$

ou encore si $\overset{\circ}{U} = U$.

Exemple 16.11. Les intervalles ouverts de \mathbb{R} sont des parties ouvertes de \mathbb{R} .

Exercice de colle (E2)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $a \in E$. Montrer que pour tout $r > 0$, la boule $B(a, r)$ est une partie ouverte de E .

Proposition 19

- E et \emptyset sont des parties ouvertes de E .
- Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Preuve.

□

Attention : Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Ainsi, par exemple

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\} \quad \text{qui n'est pas ouvert.}$$

16.4.2 Points adhérents, parties fermées

Définition 15

Soit A une partie de E et a un vecteur de E . On dit que a est un point adhérent à A si :

$$\forall r > 0, \quad B(a, r) \cap A \neq \emptyset$$

ou encore si

$$\forall r > 0, \quad \exists x \in A, \quad \|x - a\| < r.$$

Illustration graphique :

Proposition 20 (Caractérisation séquentielle)

Soit A une partie de E et a un vecteur de E . Alors a est un point adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a .

Preuve.

□

Définition 16

Soit A une partie de E .
 On appelle adhérence de A l'ensemble de ses points adhérents.
 On la note \bar{A} .

Remarque : On a toujours $A \subset \bar{A}$.

Définition 17

Soit F une partie de E .
 On dit que F est une partie fermée de E si tous les points de E adhérents à F sont dans F , autrement dit si :

$$\forall a \in E, \quad (\forall r > 0, \quad B(a, r) \cap F \neq \emptyset) \implies a \in F,$$

ou encore si $F = \bar{F}$.

Exemple 16.12. Les intervalles fermés sont des parties fermées. On admet aussi que les produits de parties fermées sont des parties fermées. Ainsi, par exemple, $[a, b] \times [c, d]$ est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .

Exemple 16.13. On pourrait aussi montrer que les boules fermées et les sphères sont des parties fermées.

La caractérisation séquentielle des points adhérents s'écrit aussi pour les parties fermées.

Proposition 21

Soit F une partie de E . Alors
 F est une partie fermée $\stackrel{\text{définition}}{\iff} F$ contient tous ses points adhérents
 \iff toute suite d'éléments de F qui converge dans E a sa limite dans F

Proposition 22

- E et \emptyset sont des parties fermées de E .
- Une réunion finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Preuve. • E et \emptyset sont des parties fermées de E , il n'y a rien à démontrer.

• Soient F_1, \dots, F_p des parties fermées de E . Montrons que $F = \bigcup_{i=1}^p F_i$ est une partie fermée de E .

Soit $a \in E$ un point adhérent à F , montrons que $a \in F$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers a .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists i_n \in \{1, \dots, p\}, \quad a_n \in F_{i_n}.$$

Et comme il y a un nombre fini de parties F_i , l'une d'entre elles au moins contient une infinité des termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Ou encore :

$$\exists i \in \{1, \dots, p\}, \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante, tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{\varphi(n)} \in F_i.$$

Ainsi, la suite $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F_i , et elle converge vers a car c'est une suite extraite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Comme F_i est une partie fermée, $a \in F_i \subset F$, ce qu'on voulait.

• Soient $(F_i)_{i \in I}$ une famille de parties fermées de E . Montrons que $G = \bigcap_{i \in I} F_i$ est une partie fermée de E .

Soit $a \in E$ un point adhérent à G , montrons que $a \in G$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G qui converge vers a .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \quad a_n \in F_i.$$

Et comme F_i est fermée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in F_i$. Ceci est valable pour tout $i \in I$, donc $a \in G = \bigcap_{i \in I} F_i$, ce qu'on voulait. □

On termine ce paragraphe par la proposition suivante, qui donne le lien entre les parties ouvertes et les parties fermées.

Proposition 23

Soit A une partie de E . On note $\complement(A)$ le complémentaire de A dans E , c'est-à-dire :

$$\complement(A) = E \setminus A = \{x \in E, x \notin A\}.$$

Alors, on a l'équivalence suivante.

$$A \text{ est une partie fermée de } E \iff \complement(A) \text{ est une partie ouverte de } E$$

Preuve.



□

16.4.3 Frontière d'une partie

Définition 18

Soit A une partie de E .

On appelle frontière de A l'ensemble de ses points qui lui sont adhérents mais pas intérieurs, c'est-à-dire :

$$Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Exemple 16.14. La frontière de $[0, 1[$ est $\{0; 1\}$, la frontière d'une boule fermée $\overline{B}(a, R)$ est la sphère $S(a, R)$.

Intuitivement : Nous considérerons le plus souvent des ensembles simples. Ainsi, on pourra souvent imaginer que :

- L'adhérence d'une partie A est A auquel on ajoute son « bord » (c'est-à-dire la frontière).
- L'intérieur d'une partie A est A auquel on enlève le « bord ».
- Une partie A est ouverte, si elle ne contient aucun point de son « bord », c'est-à-dire si $A = \overset{\circ}{A}$.
- Une partie A est fermée, si elle contient tous les points de son bord, c'est-à-dire si $A = \overline{A}$.
- Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Illustration graphique :

Néanmoins, la frontière d'une partie n'est pas toujours aussi intuitive. En témoigne le paragraphe suivant.

16.4.4 Partie dense

Définition 19

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E . On dit que A est dense dans E si l'une des trois propositions équivalentes suivantes est vérifiée.

- (1) $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \|x - a\| < \varepsilon$
- (2) $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$
- (3) Tout élément x de E est limite d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A
- (4) $\overline{A} = E$

L'équivalence entre ces 4 propositions est assez naturelle quand on connaît la définition et les caractérisations de valeur d'adhérence.

Exercice de colle (E2)

On munit \mathbb{R} de sa norme usuelle (la valeur absolue). Montrer que l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Exercice de colle (E3)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

16.4.5 Invariance par normes équivalentes

On admettra la proposition suivante.

Proposition 24

- Soient N et N' sont deux normes **équivalentes** d'un espace vectoriel E et A une partie de E . On a :

A est une partie ouverte de $(E, N) \iff A$ est une partie ouverte de (E, N')

A est une partie fermée de $(E, N) \iff A$ est une partie fermée de (E, N')

A est une partie dense dans $(E, N) \iff A$ est une partie dense dans (E, N')

- Si E est de dimension finie, la notion de partie ouverte, fermée ou dense ne dépend pas de la norme choisie sur E .

16.5 Etude locale d'une application

Dans les paragraphes suivants, E et F désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels munis de normes notées toutes deux $\|\cdot\|$.

16.5.1 Définitions**Définition 20**

Soit A une partie de E et $f : A \rightarrow F$. On se donne $a \in E$ un point **adhérent** à A . On dit que f admet une limite $b \in F$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Remarque importante : Là encore, cette définition dépend du choix des normes sur E et F .

Illustration graphique :

Remarque : Comme pour les fonctions numériques, on peut démontrer que si f admet une limite en a , alors cette limite est **unique**.

Quand $E = \mathbb{R}$, on peut aussi s'intéresser au comportement d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$.

Définition 21

- Soit $f :]\alpha, +\infty[\rightarrow F$ une fonction et soit $b \in F$. On dit que f tend vers b en $+\infty$ si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]\alpha, +\infty[, \quad x > M \implies \|f(x) - b\|_F < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

- Soit $f :]-\infty, \alpha[\rightarrow F$ une fonction et soit $b \in F$. On dit que f tend vers b en $-\infty$ si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, \alpha[, \quad x < M \implies \|f(x) - b\|_F < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Quand $F = \mathbb{R}$, on peut aussi définir la notion de limite infinie.

Définition 22

Soit $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in E$ un point adhérent à A .

- On dit que f tend vers $+\infty$ en a si on a

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

- On dit que f tend vers $-\infty$ en a si on a

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \implies f(x) \leq M.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

16.5.2 Propriétés

Comme pour les fonctions numériques, on peut démontrer les propriétés suivantes.

Proposition 25

- Soient $f, g : A \subset E \rightarrow F$ et $a \in E$ un point adhérent à A . On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in F$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \in F$. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda b + \mu c.$$

- Soient $f : A \subset E \rightarrow F$, $\lambda : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in E$ un point adhérent à A . On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in F$ et $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \alpha \in \mathbb{K}$. Alors la fonction λf admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \alpha b.$$

- Soient $f : A \subset E \rightarrow B \subset F$ et $g : B \subset F \rightarrow G$.

Soit $a \in E$ un point adhérent à A . On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in F$. Alors

$\Leftrightarrow b$ est un point adhérent à B

\Leftrightarrow si $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in G$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$.

Si F est de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de F . Si $f : A \subset E \longrightarrow F$, on peut définir ses applications coordonnées (f_1, \dots, f_n) par

$$\forall x \in A, \quad f(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n.$$

Avec ces notations, on a la proposition suivante.

Proposition 26

Si $a \in E$ est un point adhérent à A et si $b = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ on a l'équivalence suivante.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i.$$

Et donc d'une limite dans F , on peut se ramener à n limites dans \mathbb{K} .

Exemple 16.15. Soit f à valeurs dans \mathbb{R}^3 définie par $f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}, \sqrt{1-x}, e^{x \ln(x)} - 1 \right)$.

Donner l'ensemble de définition de f et préciser ses fonctions coordonnées.

Déterminer la limite éventuelle de f en 0.

16.6 Continuité

16.6.1 Définitions

Définition 23

Soit A une partie de E et $f : A \subset E \longrightarrow F$. On se donne $a \in E$ un point **adhérent** à A .

- Si $a \in A$, on dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Si $a \notin A$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, on peut prolonger la fonction f par continuité en a en posant $f(a) = b$.

On dira que f est continue sur A si elle l'est un tout point de A .

Exemple 16.16. Prolonger la fonction f par continuité en 0.

Définition 24

Si $A \subset E$, on note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions $f : A \longrightarrow F$ continues sur A .

16.6.2 Propriétés

Toutes les propriétés données pour les limites s'adaptent à la continuité.

Proposition 27

- Soient $f, g : A \subset E \rightarrow F$ et $a \in A$. On suppose que f et g sont continues en a . Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a .
- Soient $f : A \subset E \rightarrow F$, $\lambda : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in A$. On suppose que λ et f sont continues en a . Alors la fonction $\lambda \cdot f$ est continue en a .
- Soient $f : A \subset E \rightarrow B \subset F$ et $g : B \subset F \rightarrow G$. Soit $a \in A$ et $b = f(a) \in B$. Si f est continue en a et si g est continue en b alors $g \circ f$ est continue en a .

En conséquence, on a la proposition suivante.

Proposition 28

L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ muni des lois $(+, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Si F est de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de F , on peut encore caractériser la continuité d'une application $f : A \subset E \rightarrow F$ à l'aide de ses fonctions coordonnées (f_1, \dots, f_n) .

Proposition 29

Soit $a \in A$. On a l'équivalence suivante.

$$f \text{ est continue en } a \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, f_i \text{ est continue en } a.$$

16.6.3 Caractérisation séquentielle

On généralise ici un énoncé déjà démontré en première année (MPSI).

Proposition 30

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $a \in E$ un point adhérent à A .

- On a l'équivalence suivante.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b. \end{array} \right.$$

- Si $a \in A$, on a l'équivalence suivante (il suffit de prendre $b = f(a)$).

$$f \text{ est continue en } a \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a). \end{array} \right.$$

Preuve. On montre le premier point seulement.

\implies Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

⇐ Supposons que $f(x)$ ne tende pas vers b lorsque x tend vers a .
 On construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A , telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ et telle que $f(x_n)$ ne tende pas vers b .

□

16.6.4 Propriétés topologiques

On admet la proposition suivante.

Proposition 31

Soit $f : E \rightarrow F$.

- Si f est continue, alors l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E .
- Si f est continue, alors l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E .

Remarque : La réciproque est vraie aussi mais elle n'est pas au programme de PSI.

Conséquence : L'intérêt de cette proposition est de démontrer, de manière assez simple, que certaines parties de E sont ouvertes ou fermées. Ainsi, si par exemple, $F = \mathbb{R}$, on sait que

$$]-\infty, \alpha[\text{ et }]\alpha, +\infty[\text{ sont des ouverts de } \mathbb{R}.$$

$$]-\infty, \alpha], \{\alpha\} \text{ et }]\alpha, +\infty[\text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, on a donc

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}(]-\infty, \alpha[) &= \{x \in E, f(x) < \alpha\} \\ f^{-1}(] \alpha, +\infty[) &= \{x \in E, f(x) > \alpha\} \end{aligned} \right\} \text{ sont des ouverts de } E.$$

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}(]-\infty, \alpha]) &= \{x \in E, f(x) \leq \alpha\} \\ f^{-1}(\{\alpha\}) &= \{x \in E, f(x) = \alpha\} \\ f^{-1}(] \alpha, +\infty]) &= \{x \in E, f(x) \geq \alpha\} \end{aligned} \right\} \text{ sont des fermés de } E.$$

Exemple 16.17. Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y \geq 0\}$.
Représenter U et montrer que c'est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .

La proposition du théorème suivant est hors-programme.

Proposition 32 (Théorème des bornes atteintes (E de dimension finie))

Soit $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ où E est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Si $A \subset E$ une partie non vide, fermée et bornée de E (on dit alors que A est une « partie compacte ») et si f est continue sur A alors f est bornée et elle atteint ses bornes.

Remarque : cet énoncé sera utilisé essentiellement dans le chapitre « Fonctions de plusieurs variables ».

Exemple 16.18. Soit $f : \overline{B}(0, R) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4x^2 + 3xy$.
Démontrer que f est bornée et qu'il existe $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \overline{B}(0, R)$ tels que

$$f(x_1, y_1) = \max\{f(x, y), (x, y) \in \overline{B}(0, R)\} \quad \text{et} \quad f(x_2, y_2) = \min\{f(x, y), (x, y) \in \overline{B}(0, R)\}.$$

16.6.5 Applications lipschitziennes

Définition 25

Soient E et F des espaces vectoriels normés, $f : A \subset E \rightarrow F$ une application et $k > 0$ un réel. On dit que f est k -lipschitzienne si pour tout $(x, y) \in A^2$ on a

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_F.$$

Exemple 16.19. Soit E un espace vectoriel normé dont on note N la norme. L'application $x \mapsto N(x)$ est 1-lipschitzienne.

En effet, pour tout $x, y \in E$, l'inégalité triangulaire donne

$$N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y) \quad \text{et donc} \quad N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$

De même $N(y) - N(x) \leq N(x - y)$ et par conséquent $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) = 1 \cdot N(x - y)$ ce qui montre le résultat annoncé.

Exemple 16.20. L'application \ln est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[2, +\infty[$.

Proposition 33

La composée de deux applications respectivement k -lipschitzienne et k' -lipschitzienne, est une application kk' -lipschitzienne.

Preuve.

□

Proposition 34

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. Si f est lipschitzienne sur A alors elle est continue sur A . Mais la réciproque est fautive.

Preuve.

□

Exemple 16.21. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, 1]$. Montrer que pourtant, elle n'est pas lipschitzienne.

16.6.6 Applications linéaires

Proposition 35

Soient E et F deux espaces vectoriels normés avec E de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors f est lipschitzienne et donc elle est continue.

Preuve.

□

Exemple 16.22. (E2) Méthode 3 - On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$.

On a vu que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Justifier que l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n$ et retrouver la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$.

16.6.7 Applications multilinéaires et polynomiales sur \mathbb{K}^n

Proposition 36

Soit $f : \mathbb{K}^n \rightarrow K$ une application polynomiale. Elle s'écrit :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f(x) = \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_n \leq N} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Alors, par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur \mathbb{K}^n .

On montrerait enfin la proposition suivante.

Proposition 37

Soient E et F deux espaces vectoriels normés avec E de dimension finie. Soit $f : (E)^p \rightarrow F$ une application p -linéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Alors f est continue.

Exemple 16.23. Il faut savoir justifier rapidement que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ est continue.

- Soit par : L'application \det est polynomiale en les coefficients de M (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base canonique) donc elle est continue.

- Ou bien par : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(M), \dots, C_n(M)$ ses colonnes.

L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (C_1(M), \dots, C_n(M)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ est linéaire donc continue ($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie).

L'application $(C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n \mapsto \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$ est n -linéaire donc continue ($\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ de dimension finie), où \mathcal{B} est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En composant les deux, on obtient bien que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ est continue.

Exemple 16.24. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, l'application $(u, v) \in E^2 \mapsto \langle u, v \rangle$ est bilinéaire donc continue sur E^2 .

Exemple 16.25. L'application $\varphi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(A, B) = AB$ est bilinéaire donc continue.

L'application $A \mapsto (A, A)$ est linéaire donc continue (dimension finie), et par composition, l'application :

$$A \mapsto (A, A) \xrightarrow{\varphi} A^2$$

est aussi continue.

Par une récurrence simple, $A \mapsto A^n$ est continue, et par linéarité, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'application $A \mapsto P(A)$ est aussi continue.