Chapitre 14

Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, considère exclusivement des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$. Ces espaces peuvent être de dimension finie ou infinie.

14.1 Produit scalaire et norme associée

14.1.1 Définition

Définition 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire sur E, symétrique et définie-positive, c'est-à-dire toute application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \varphi(x, y) \end{array} \right.$$

telle que :

- $\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, *(symétrie)*
- $\forall y \in E,\ x \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.
  Par symétrie, on a donc la linéarité par rapport à la seconde variable. *(bilinéarité)*
- $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$. *(définie-positivité)*

Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Notations : On écrit usuellement $\varphi(x, y) = x.y, (x, y), (x|y), \langle x, y\rangle$ ou encore $\langle x|y\rangle$.

Définition 2

Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

14.1.2 Exemples à connaître

Exemple 14.1. : Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ ou sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ce produit scalaire s'écrit à l'aide du produit matriciel :

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\langle X, Y\rangle = X^T.Y$.

Exemple 14.2. : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T.B)$.

Montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire **(D1)**.

Exemple 14.3. : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:

Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et tout $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.

Montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire **(D1)**.

14.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|.\|y\| \qquad (\star)$$

où l'on a noté $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Il y a égalité dans $(\star)$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve.(D1)

$\square$

14.1.4 Norme associée

Proposition 2 (Inégalité de Minkowski)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad (\star)$$

où l'on a noté $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Il y a égalité dans $(\star)$ si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Preuve.

$\square$

Proposition 3

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
L'application $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur E.
On l'appelle norme euclidienne associée à $\langle\ ,\ \rangle$.

Preuve.

$\square$

Définition 3 (Distance associée)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
L'application $(x,y) \in E^2 \longmapsto d(x,y) = \|x-y\|$ est appelée distance euclidienne associée à $\langle\ ,\ \rangle$.
On admet qu'il s'agit bien d'une distance sur E.

14.1.5 Identités de polarisation

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a (calculs à maîtriser) :

$$\boxed{\begin{aligned} \|\lambda x+\mu y\|^2 &= \langle \lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y\rangle \\ &= \lambda^2\langle x,x\rangle+\lambda\mu\langle x,y\rangle+\mu\lambda\langle y,x\rangle+\mu^2\langle y,y\rangle \\ &= \lambda^2\|x\|^2+2\lambda\mu\langle x,y\rangle+\mu^2\|y\|^2 \end{aligned}}$$

Avec $\lambda=\pm 1$, $\mu=\pm 1$, en combinant les égalités obtenues, on obtient facilement le proposition suivante.

Proposition 4

Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a :
Identités de polarisation :

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\Big) \end{aligned}$$

Identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

Illustration graphique :

14.2 Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe, $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ désigne un espace préhilbertien réel.

14.2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 4

- Soit $x\in E$. On dit que x est unitaire si $\|x\|=1$.
- Soient $x,y\in E$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle=0$. On le note $x\perp y$.

Si x est un vecteur **non nul** de E, alors il existe deux vecteurs de E unitaires et colinéaires à x :

$$u_1=\frac{1}{\|x\|}x \qquad \text{et} \qquad u_2=-\frac{1}{\|x\|}x.$$

14.2.2 Applications à la géométrie

Proposition 5

• Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, si $n = (a, b) \neq 0$, l'équation de la droite vectorielle (D) orthogonale à n est

$$(D) : \quad ax + by = 0.$$

• Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, si $n = (a, b, c) \neq 0$, l'équation du plan vectoriel (P) orthogonal à n est

$$(P) : \quad ax + by + cz = 0.$$

Preuve.

□

Exercice de colle (E1)

Dans l'espace affine $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'équation du plan passant par $A(1, 2, 0)$ et orthogonal à $\vec{n} = (1, -1, 2)$.

14.2.3 Familles orthogonales

Définition 5

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
• On dit que $\mathcal{F}$ est orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

• On dit que $\mathcal{F}$ est orthonormale (ou orthonormée) si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires autrement dit si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Exemple 14.4. *Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère*

$$x_1 = (1, -1, 2), \quad x_2 = (-1, 1, 1), \quad x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_4 = (1, 1, 0).$$

La famille (x_1, x_2, x_3, x_4) est clairement orthogonale.
On a $\|x_1\| = \sqrt{6}, \|x_2\| = \sqrt{3}, \|x_3\| = 0$, et $\|x_4\| = \sqrt{2}$ donc (x_1, x_2, x_3, x_4) n'est pas orthonormale. En revanche,

$$\text{La famille } \left(\frac{1}{\sqrt{6}} x_1, \frac{1}{\sqrt{3}} x_2, \frac{1}{\sqrt{2}} x_4 \right) \text{ est orthonormale.}$$

Proposition 6

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Si $\mathcal{F}$ est orthogonale et si tous ses vecteurs sont non nuls alors $\mathcal{F}$ est libre.

Preuve.(D2)

□

Remarque : Si $\mathcal{F}$ est une famille orthonormée de E alors elle est libre. En effet, elle est orthogonale et tous ses vecteurs étant unitaires, ils sont non nuls.

14.2.4 Théorème de Pythagore

Proposition 7 (Théorème de Pythagore)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'équivalence suivante.

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \perp y.$$

Preuve.

□

14.2.5 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition 6

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux (et on note $F \perp G$) si :

$$\forall x_F \in F, \quad \forall x_G \in G, \qquad x_F \perp x_G.$$

Proposition 8

Soit A un sous-ensemble de E. On appelle orthogonal de A l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A,\ x \perp y\} = \{x \in E \mid \forall y \in A,\ \langle x, y \rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : cette définition sera souvent utilisée dans le cas où $A = F$ est sous-espace vectoriel de E.

Preuve.

□

On retiendra

$$x \in A^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in A, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Proposition 9

- $\{0\}^{\perp} = E$.
- $E^{\perp} = \{0\}$, autrement dit si un vecteur $x \in E$ est orthogonal à tous les vecteurs de E, alors il est nul.

Preuve.

□

Exercice de colle (E2)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que si pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)$ alors $A = B$.

Proposition 10

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :

- $F \subset G \quad \Longrightarrow \quad G^\perp \subset F^\perp$,
- $F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc F et $F^\perp$ sont en somme directe,
- $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Preuve.

$\square$

14.3 Espaces euclidiens

Dans tout ce paragraphe, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ désigne un espace euclidien, c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie.

14.3.1 Bases orthonormales (ou orthonormées)

Définition 7

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de E. On dit que c'est une base orthonormale de E si c'est une base et si c'est une famille orthonormée de E.

On admet les théorèmes suivants qui donnent l'existence de bases orthonormales. Un algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sera néanmoins décrit dans le paragraphe suivant.

Proposition 11

On suppose que E est de dimension n et on se donne une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de E.
Alors, il existe une unique base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} e_i \in \mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_i\} \\ \text{et} \\ \langle e_i, u_i \rangle > 0 \end{array} \right.$$

Proposition 12 (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en base orthonormale.

Corollaire 1

Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormale.

Exercice de colle (E1)

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de (u_1, u_2, u_3) avec

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (0, 1, 1).$$

Exemple 14.5. *La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire usuel.*

Exemple 14.6. *La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormale pour le produit scalaire usuel.*

14.3.2 Expressions en base orthonormée

Proposition 13 (TRÈS IMPORTANT)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
• Si $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ est un vecteur de E alors :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i = \langle e_i, x\rangle$$

et donc

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i.$$

• Si $x, y \in E$ et si $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x), Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$ alors :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T.Y \text{ et donc } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^T.X}.$$

Preuve.

□

Exercice de colle (E1)

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'égalité :

$$\operatorname{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i\rangle.$$

14.3.3 Formes linéaires

Proposition 14

Si E est un espace euclidien E, l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \langle a, . \rangle : x \longmapsto \langle a, x \rangle \end{array} \right.$$

Preuve.

$\square$

Et donc tout élément de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ possède un et un seul antécédent par φ, ce qui s'écrit :

Corollaire 2

Dans l'espace euclidien E, si $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est une forme linéaire, alors il existe un unique $a \in E$ tel que

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \langle a, x \rangle \end{array} \right.$$

Lien avec l'expression en base orthonormale : Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, par linéarité de f, on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \langle x, a \rangle = \langle a, x \rangle$,
où l'on a noté $a = (f(e_1), \ldots, f(e_n))_{\mathcal{B}}$.

14.3.4 Un exemple dans l'espace des polynômes (E2)

Exercice de colle (E2)

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux-à-deux. Pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrer que la base de Lagrange associée à $a_0, a_1, \dots, a_n$ est une base orthonormée de $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle\ ,\ \rangle$.
3. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice de colle (E3)

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux-à-deux. Pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P(\alpha)$.
Justifier qu'il s'agit d'une forme linéaire et déterminer l'unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ pour lequel on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = \langle Q, P\rangle.$$

14.4 Projection orthogonale sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans ce paragraphe, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ désigne un espace préhilbertien réel, de dimension finie ou non.

14.4.1 Orthogonal d'un s.e.v. de dimension finie

Lemme

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de F. Pour tout $x \in E$, on a l'équivalence suivante.

$$x \in F^{\perp} \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle x, e_i\rangle = 0.$$

Preuve.

$\square$

Proposition 15

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est de dimension finie alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

Preuve.(D2) On se donne une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de F et on raisonne par analyse et synthèse.
Soit $x \in E$.

$\square$

Corollaire 3

Si E est de dimension finie alors pour tout sous-espace vectoriel F de E on a :

- $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^{\perp})$,
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Preuve.

□

14.4.2 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie

Définition 8

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On a donc $F \oplus F^{\perp} = E$.
On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F dans la direction de $F^{\perp}$, c'est-à-dire l'application suivante.

$$p_F : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & p_F(x) = y \end{array} \right.$$

où $x = y + z$ avec $y \in F, z \in F^{\perp}$.

Remarque : Toutes les propositions vues pour les projecteurs (ou projections) sont encore valables pour les projecteurs orthogonaux en général. Ainsi, si p est une projection orthogonale alors $E = \mathrm{Im}(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(p)$ et p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(p)$.
On a donc la proposition suivante.

Proposition 16

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence suivante.

$$p \text{ est une projection orthogonale} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} p \circ p = p \\ \quad \text{et} \\ \mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p) \end{array} \right.$$

Et dans ce cas, $E = \mathrm{Im}(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(p)$ et p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(p)$.

Remarque : Si p est la projection orthogonale sur F alors c'est un projecteur orthogonal. De plus, $s = 2p - Id$ est la symétrie orthogonale par rapport à F et on a

$$F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - Id) = \mathrm{Ker}(s - Id) \qquad \text{et} \qquad F^{\perp} = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p - Id) = \mathrm{Ker}(s + Id).$$

Illustration graphique :

En utilisant l'expression du projeté orthogonal en base orthonomale obtenu dans la preuve de la proposition **15**, et la définition de deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux, on obtient les deux assertions suivantes souvent bien utiles dans la résolution d'exercices.

Proposition 17 (TRÈS IMPORTANT)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, p_F la projection orthogonale sur F et x un vecteur de E. On a :

- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est un base orthonormée de F alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i$.
- On a la caractérisation suivante.

$$y = p_F(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$

Exemple 14.7. Projeté orthogonal d'un vecteur sur une droite vectorielle :

Soit $u \in E$ un vecteur non nul et $\Delta = \mathrm{Vect}\{u\}$. Alors $e = \dfrac{u}{\|u\|}$ forme une base orthonormale de Δ et donc avec les notations précédentes, on a

$$\forall x \in E, \qquad p_\Delta(x) = \langle e, x \rangle e = \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u.$$

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, si $\Delta = \mathrm{Vect}\{(1, 2, -2)\}$ alors $e = \dfrac{1}{3}(1, 2, -2)$ forme une base orthonomrale de Δ et pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$p_\Delta(u) = \langle e, u \rangle e = \frac{x + 2y - 2z}{9}(1, 2, -2).$$

Application : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Dans un espace euclidien E de dimension n, on se donne une base $(u_1, \dots, u_n)$. On suppose avoir orthonormalisé $(u_1, \dots, u_p)$ en $(e_1, \dots, e_p)$ et on donne une construction de e_{p+1}.
Le projeté orthogonal de u_{p+1} sur $\mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_p\} = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_p\}$ s'écrit

$$v_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, u_{p+1} \rangle e_i.$$

Et donc, on pose

$$e'_{p+1} = u_{p+1} - v_{p+1} = u_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, u_{p+1} \rangle e_i.$$

C'est un vecteur de $\mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}\}$, orthogonal à chacun des vecteurs $e_1, \dots, e_p$ et tel que

$$\langle e'_{p+1}, u_{p+1} \rangle = \|u_{p+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, u_{p+1} \rangle^2 = \|u_{p+1}\|^2 - \|v_{p+1}\|^2 \geqslant 0,$$

d'après l'égalité de Pythagore.
Et la minoration est stricte car $u_{p+1} \notin \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_p\}$ et donc $u_{p+1} \neq v_{p+1}$.
Il reste à normaliser le vecteur e'_{p+1} en posant $e_{p+1} = \dfrac{e'_{p+1}}{\|e'_{p+1}\|}$.

Exercice de colle (E1)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_2) avec

$$u_1 = (1, 0, 0), \qquad u_2 = (1, 2, -1) \quad \text{et} \quad u_3 = (2, 1, 0).$$

14.4.3 Distance à un s.e.v. en dimension finie

Définition 9

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et x un vecteur de E. On appelle distance de x à F le réel :

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y),\ y \in F\} = \inf\{\|x - y\|,\ y \in F\}.$$

Remarque : Cette définition a bien un sens puisque l'ensemble $\{\|x - y\|,\ y \in F\}$ est non vide (il contient $\|x - 0\|$ car $0 \in F$) et il est minoré par 0.

Proposition 18

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, x un vecteur de E et p_F la projection orthogonale sur F. On a :

- $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$,
- $p_F(x)$ est le seul vecteur u de F tel que $\|x - u\|$ réalise la distance de x à F,
- le théorème de Pythagore donne $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$.

Preuve.

$\square$

On remarque en particulier que $\|p_F(x)\|^2 \leqslant \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2 = \|x\|^2$ et donc on a le corollaire suivant.

Corollaire 4 (Inégalité de Bessel)

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F. On a :

$$\forall x \in E, \qquad \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$

14.4.4 Distance à un plan dans $\mathbb{R}^3$

Dans ce paragraphe, on donne trois façons de determiner la distance d'un vecteur à un plan dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Il s'agit de techniques de calculs basiques qu'il faut maîtriser. Elles peuvent également s'appliquer dans la détermination de matrices de projections orthogonales. Elles permettront aussi de comprendre des situations dans des cas plus abstraits.

• **Recherche d'un projeté orthogonal**

Exercice de colle (E1)

Déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sur le plan vectoriel $P : 2x + y - z = 0$.

• **Distance d'un vecteur à un plan : en utilisant un vecteur normal**

Exercice de colle (E1)

Déterminer la distance d'un vecteur $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ au plan vectoriel $P : 2x + y - z = 0$.

• **Distance d'un vecteur à un plan : en utilisant une base**

Exercice de colle (E1)

Déterminer la distance du vecteur $v = (2, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$ au plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$ avec

$$u_1 = (1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad u_2 = (2, 1, 0)$$

• **Distance d'un vecteur à un plan : en utilisant une base orthonormale**

Exercice de colle (E1)

Déterminer la distance du vecteur $v = (2, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$ au plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$ avec

$$u_1 = (1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad u_2 = (2, 1, 0)$$

14.4.5 Distance à un hyperplan

On rappelle qu'on peut définir un hyperplan de deux façons :

- Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
  Et deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.
- Un hyperplan est un sous-espace vectoriel admettant une droite vectorielle pour supplémentaire.

Dans un espace vectoriel E de **dimension finie** $n \geqslant 1$, un hyperplan H est donc un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Et si l'espace vectoriel est muni d'un produit scalaire, on a

$$E = H \oplus H^{\perp}$$

avec $\dim(H^{\perp}) = 1$. Ainsi, $H^{\perp}$ est une droite vectorielle et donc il existe $a \in E$ non nul tel que $H^{\perp} = \mathrm{Vect}\{\mathrm{a}\}$. Avec ces notations, on a la proposition suivante.

Proposition 19 (à savoir retrouver rapidement)

Soit H un hyperplan de E avec $H^{\perp} = \mathrm{Vect}\{\mathrm{a}\}$ et soit $x \in E$.
Le projeté orthogonal de x sur H est $p_H(x) = x - \left\langle \dfrac{a}{\|a\|}, x \right\rangle \dfrac{a}{\|a\|}$.

Preuve.

□

Proposition 20 (à savoir retrouver rapidement)

Soit H un hyperplan de E avec $H^\perp = \text{Vect}\{\text{a}\}$. Pour tout vecteur $x \in E$, on a $d(x, H) = \dfrac{|\langle a, x\rangle|}{\|a\|}$.

Preuve.

$\square$

Cas d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$: On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel et on suppose que H est donné par une équation cartésienne.

$$H : \qquad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Ainsi, en notant $a = (a_1, \ldots, a_n)$, on a

$$\begin{aligned} x = (x_1, \ldots, x_n) \in H \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad \langle a, x\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad x \in \left(\text{Vect}\{\text{a}\}\right)^\perp \end{aligned}.$$

Ainsi, $H = \left(\text{Vect}\{\text{a}\}\right)^\perp$ ou encore (puisque E est de dimension finie) $\text{Vect}\{\text{a}\} = \text{H}^\perp$. La proposition précédente donne alors

$$\boxed{d(x, H) = \frac{|\langle a, x\rangle|}{\|a\|} = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}}$$

Lien avec les formes linéaires : Si H est défini comme noyau d'une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ non nulle :

$$H = \text{Ker}(\varphi)$$

D'après le corollaire **2**, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x) = \langle a, x\rangle.$$

Ainsi, $H = \text{Ker}(\varphi) = \{x \in E, \quad \langle a, x\rangle = 0\} = \left(\text{Vect}\{\text{a}\}\right)^\perp$ et donc $\text{Vect}\{\text{a}\} = \text{H}^\perp$. La proposition précédente donne alors

$$\boxed{d(x, H) = \frac{|\langle a, x\rangle|}{\|a\|} = \frac{|\varphi(x)|}{\sqrt{\varphi(a)}}.}$$

14.5 Annexe : des produits scalaires et des familles de polynômes

Ne pas les apprendre !

14.5.1 Les polynômes de Lagrange

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux-à-deux. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $a_0, a_1, \dots, a_n$ forment une base orthonormée pour ce produit scalaire.

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad L_k[X] = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(X - a_i)}{(a_k - a_i)}.$$

Propriétés :

- Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a $\deg(L_k) = n$.
- Pour tout $i, k \in \{0, \dots, n\}$, on a $L_k(a_i) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$
- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(X)$.

Aux concours : *E3A PSI Maths1 2017, (E3A PSI Maths1 2014), CCINP MP Maths1 2018, E3A PC 2021, Centrale PC 2022*

14.5.2 Les polynômes de Legendre

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (et donc sur $\mathbb{R}_n[X]$). Les polynômes de Legendre forment une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Ils sont complètement définis par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad L_n(X) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}\Big((X^2 - 1)^n\Big).$$

Propriétés :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\deg(L_n) = n$,
- En développant par la formule du binôme de Newton et en dérivant n fois, on montrerait que

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X - 1)^{n-k}(X + 1)^k.$$

Aux concours : *Centrale MP Maths2 2011*

14.5.3 Les polynômes de Tchebychev

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\boxed{\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta.}$$

La première intégrale (impropre) est convergente. On montre l'égalité par le changement de variable $t = \cos(\theta)$. C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (et donc sur $\mathbb{R}_n[X]$).

Les polynômes de Tchebychev forment une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Ils sont complètement définis par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Propriétés :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n, son terme dominant est 2^{n-1} et il est de même parité que l'entier n.
- $T_0 = 1$, $T_1(X) = X$ et on a la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1}(X) - 2XT_n(X) + T_{n-1}(X) = 0.$$

Aux concours : *E3A PSI Maths1 2014, Centrale MP Maths2 2014, Centrale PC Maths1 2012, E3A PC MathsA 2005, CCP MP Maths1 2003, Centrale PC 2022...*

14.5.4 Les polynômes de Laguerre

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\boxed{\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.}$

Il s'agit d'une intégrale impropre convergente. C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (et donc sur $\mathbb{R}_n[X]$). Les polynômes de Laguerre forment une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Ils sont complètement définis par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad L_n(X) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big(x^n e^{-x}\Big).$$

14.5.5 Les polynômes d'Hermite

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\boxed{\langle P, Q\rangle = \int_{\mathbb{R}} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt.}$$

Il s'agit d'une intégrale impropre convergente. C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (et donc sur $\mathbb{R}_n[X]$). Les polynômes de Laguerre forment une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Ils sont complètement définis par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_n(X) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2}\Big).$$

Aux concours : *Mines-Ponts PSI Maths2 2009, CCP MP Maths2 2016*